Stærðfræði N
Próf frá ágúst 2000 – stuttar lausnir

Dæmi 1.

a) Skrifið eina tölu milli 4,3001 og 4,30009

b) Yfirborð kúlunnar K_1 er 17% stærra en yfirborð kúlunnar K_2. Hve mörgum prósentum minni er radíus kúlunnar K_2 en radíus kúlunnar K_1?

Lausn. a) Til dæmis talan 4,300095.

b) Formúlan fyrir yfirborðsflatarmáli kúlu er $4\pi r^2$, þar sem r er radíus (geisli) kúlunnar. Ef r_1 táknar radíus kúlunnar K_1 og r_2 táknar radíus kúlunnar K_2. Þá er $4\pi r_1^2 = 1,17 \cdot 4\pi r_2^2$ og því er $r_2/r_1 = \sqrt{1/1,17} \approx 0,9245$ og því er r_2 um það bil 7,55% prósentum minni en r_1.

Dæmi 2.

Íbúafjöldi lands tvöfaldast á 10 árum en dregst síðan saman um fasta prósentu árlega næstu 10 árin þannig að í lok þeirra er íbúafjöldinn sá sami og 20 árum áður. Hver var hin fasta árlega minnkun?

Lausn. Látum I_n tákna íbúa fjöldann að n árum liðnum. Gefið er að $I_{10} = 2I_0$ og $I_{20} = I_0$. Síðan er gefið að fólksfjöldinn minnkar um fasta prósentu árlega þegar tíu ár eru liðin. Því er til tala q þannig að $I_{10+n} = I_{10}q^n$ fyrir $n \leq 10$. Þegar allt er sett saman fæst að

$$I_0 = I_{20} = I_{10}q^{10} = 2I_0q^{10}.$$

Því er $q^{10} = 1/2$ sem gefur að $q = \sqrt[10]{1/2} = 0,933$ og því minnkar fólksfjöldinn um 6,67% árlega.

Dæmi 3.

Hrafn stelur tveim hringjum en missir báða úr goggi sínum á flugi. Sá fyrri var 2 sekúndur að falla til jarðar, en sá seinni kom til jarðar á fjórfalt meiri hraða en sá fyrri. Hve langan tíma tók það hinn seinni að falla til jarðar?

Lausn. Hraði hlutar sem fellur í frjálsu falli er $9,8t$ m/sec eftir að hafa fallið í t sekúndur. Sá fyrri kom til jarðar á hraðanum 19,6 m/sec og sá seinni kom til jarðar á fjórfalt meiri hraða, eða á hraðanum 78,4 m/sec. Því tók það seinni hringinn 8 sekúndur að falla til jarðar.

Dæmi 4.

Látum $f(x)$ tákna fjölda þeirra Reykvíkinga reiknaðan í þúsundum, sem aka austur á land þegar rignt hefur x daga samfleytt suðvestanlands. Hvað merkir það að $f'(7) = 1$?

Lausn. Talan $f'(7)$ er hallatala snertils við grafið $y = f(x)$ í punktinum $(7, f(7))$. Þegar Δx er "lítil" tala þá er

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

Í þessu samhengi þá getum við metið stöðuna þannig að $\Delta x = 1$ sé "lítil" tala og þá fáum við að $f(8) - f(7) \approx 1$ og sömuleiðis að $f(6) - f(7) \approx -1$. Því getum við túlkað það að $f'(7) = 1$ þannig að ef rigningardögum fjölgar um einn og þeir verði 8 í röð þá fjölgi þeim sem keyra austur um 1 þúsund. Því má skoða töluna $f'(7)$ sem vísbendingu um hvaða áhrif það hefði ef það rigndi í einn dag í viðbót.

Dæmi 5. Í stöðuvatni eru eiturefni af styrk $10^{-6}g/l$. Í vatnið renna ár og er styrkur eiturefna í þeim $10^{-9}g/l$. Útrennsli er sama og innrennsli. Að 10 árum liðnum hefur magn eiturefna í vatninu minnkað um helming. Hvert er árlegt innrennsli miðað við heildarvatnsmagn í stöðuvatninu?

Lausn. Látum $M(t)$ tákna magn eiturefna í vatninu við tíma t. Svo táknum við heildarlítrafjöldann í vatninu með V og vatnsmagnið sem flæðir inn táknum við með A (athugið að A er líka vatnsmagnið sem flæðir út). Athugum að magn eiturefna í vatninu er í upphafi $M(0) = V \cdot 10^{-6}$ g og magn eiturefna sem berst í vatnið á hverju ári er $A \cdot 10^{-9}$ g. Viljum finna hlutfallið A/V. Diffurjafnan sem lýsir styrk eiturefna í vatninu er

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{A}{V}M + A \cdot 10^{-9}.$$

Lausn þessarar diffurjöfnu er $M(t) = Ce^{-(A/V)t} + V \cdot 10^{-9}$. Vitum að $M(0) = V \cdot 10^{-6}$ og .því er $C = V(10^{-6} - 10^{-9})$. Gefið er að $M(10) = (1/2)M(0)$ svo að

$$V(10^{-6} - 10^{-9})e^{-(A/V)\cdot 10} + V \cdot 10^{-9} = \frac{1}{2}V \cdot 10^{-6}.$$

Þegar þetta er einfaldað fæst að $e^{-(A/V)\cdot 10} \approx 0,4995$ og með því að taka náttúrlegan logra af báðum hliðum og einangra A/V fæst að

$$\frac{A}{V} \approx \frac{\ln 0,4995}{-10} \approx 0,0694.$$

Innrennslið er því rúmlega 6,9% af vatnsmagni í vatninu.

Dæmi 6.

a) Lát A vera 2×2 fylkið þar sem $a_{11} = 1$, $a_{21} = 2$ og $a_{12} = a_{22} = 0$. Reiknið A^{10}.

b) Ákvarðið vektora $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, þar sem hvorugur er núllvektorinn, þannig að $A\mathbf{a} = \mathbf{0}$ og $A\mathbf{b} = \mathbf{b}$.

Lausn. Fylkið A er $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Sjáum að $A^2 = A$. Því er ljóst að $A^{10} = A$.

b) Rita $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Það að $A\mathbf{a} = 0$ gefur okkur tvær jöfnur sem eru $a_1 = 0$ og $2a_2 = 0$. Lausn jöfnunnar $A\mathbf{a} = 0$ er því allir vigrar á forminu $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$, þar sem p má vera hvaða rauntala sem er.

Rita $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Jafnan $A\mathbf{b} = \mathbf{b}$ gefur því tvær jöfnur $b_1 = b_1$ og $2b_1 = b_2$. Lausnirnar eru allir vigrar á forminu $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ 2p \end{pmatrix}$, þar sem p má vera hvaða rauntala sem er.

Dæmi 7.

Um fall f á bili I er vitað að f er tvídiffranlegt, að f hefur tvenn beygjuskil, bæði vinstra megin við miðpunkt bilsins, að f hefur hágildi í miðpunkti og að f hefur lággildi í endapunktum. Teiknið fallrit slíks falls f.

Lausn.

Dæmi 8.

Um stærð N sem er háð annarri stærð x er vitað að línulegt samband er milli $\log N$ og x^2. Hvert er sambandið milli N og x?

Lausn. Línulegt samband á milli $\log N$ og x^2 segir að til eru fastar a og b þannig að $\log N = ax^2 + b$. Því er $10^{\log N} = 10^{ax^2+b}$ og við fáum að $N = 10^b \cdot 10^{ax^2} = 10^b \cdot (10^{x^2})^a$.

Dæmi 9.

Sigmaður sem vegur 100 kg er hífður 100 m upp á bjargbrún. Á miðri leið bætir hann á sig 25 kg af eggjum. Reipið vegur 1 kg metrinn og sigmaðurinn notar 2 m til að binda um sig. Hve mikla vinnu þarf til verksins?

Lausn. Vinna er kraftur sinnum vegalengd, einingin við vinnu er Newton sinnum metrar. (Skammstöfunin fyrir Newton-metra er Nm, en einnig er nafnið Joules notað fyrir þessa einingu og þá er skamstöfunin J.) Við að hífa 1 kg upp um einn metrar þarf að yfirvinna þyngdarkraftinn sem er 9,8 Newton og vinnan er því 9,8 Nm. (Í fyrirlestri varð mér á að sleppa margföldunarþættinum 9,8.)

Sigmaðurinn sem er 100 kg er hífður upp um 100 m og vinnan við það er $9,8 \cdot 100 \cdot 100 = 98000$ Nm. Það að hífa upp metrana 2 af reipi sem maðurinn hefur vafið um vömbina kostar 1960 Nm.

Eggjahlassið er 25 kg og fer upp um 50 m. Vinnan er $9,8 \cdot 25 \cdot 50 = 12250$ Nm.

Síðan er það reipið sem sigmaðurinn dinglar í. Þegar búið er að hífa upp x metra þá er þyngd þess reipis sem er eftir $100 - x$ kg, svo vinnan við að toga upp örlítinn bút af lengd dx í viðbót er $dW = 9,8(100 - x)\,dx$. Við leggjum saman vinnuna við að toga upp alla þessu örlitlu búta (alltsvo, við heildum) og fáum að

$$W = \int_0^{100} 9,8(100 - x)\,dx = 9,8\Big[100x - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^{100} = 9,8 \cdot 5000 = 49000.$$

Heildar vinnan fæst svo með að leggja allt þetta saman og við fáum að vinnan er 161210 Nm.

Dæmi 10.

Stærð N er mæld á lógaritmaskala sem er þannig gerður að 30 földun á N gefur hækkun um 1 á skalanum. Nú eru fengnir tveir aflestrar á skalanum, 5,7 og 6,2. Hve mörgum sinnum stærra var seinna gildið á N en það fyrra?

Lausn. Hækkun um 0,5 á skalanum segir að N margfaldist með einhverri tölu a. Við að hækka um 0,5 í tvígang þá hefur N margfaldast með a^2 en jafnframt er gefið í dæminu að N hafi 30-faldast. Svo $a^2 = 30$ og því er $a = \sqrt{30} \approx 5,477$. Seinna gildið á N í dæminu er því 5,477 sinnum stærra en það fyrra.