Stærðfræði N – Raðir

Stærðtákn á forminu

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots$$

kallast raðir. Sú fyrri er endanleg en sú seinni óendanleg. Ekkert mál er að reikna summu fyrri raðarinnar – við leggjum bara saman tölurnar. Meira mál er að skilgreina summu óendanlegu raðarinnar. Eðlilegt er að hugsa sem svo að við byrjum að leggja saman tölurnar í röðinni og reynum að álykta um hver summa raðarinnar er út frá þeim útkomum.

Hlutsummur raðarinnar eru skilgreindar þannig að

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_k &= a_1 + a_2 + \cdots + a_k. \end{aligned}$$

Þegar hlutsummurnar eru reiknaðar út þarf bara að leggja saman endanlega margar tölur í hvert skipti. Tökum nú fleiri og fleiri tölur með í summuna; það er að segja, reiknum s_k fyrir hærri og hærri gildi á k. Ef tölurnar sem við fáum eru að nálgast einhverja áveðna tölu s þá er eðlilegt að segja að

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots = s.$$

Formlega segjum við að röð $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sé samleitin (e. convergent) með summu s ef runan $\{s_k\}$ er samleitin með markgildi s; það er að segja, $s = \lim_{k\to\infty} s_k$.

Dæmi: Skoðum röðina $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Hér er

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{n=0}^{k} \tfrac{1}{2^n} \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2^3} + \cdots \tfrac{1}{2^k} \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots \tfrac{1}{2^k}. \end{aligned}$$

Kvótaröð er röð þar sem liðir raðarinnar eru tölurnar í kvótarunu. Endanleg kvótaröð er á forminu $a + aq + aq^2 + \cdots + aq^k$. Við þekkjum formúlu fyrir summu endanlegrar kvótaraðar og fáum að

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^k = a\frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}.$$

Þegar röðin $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ er skoðuð þá er $a = 1$ og $q = \frac{1}{2}$. Hér fáum við að

$$s_k = a\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{\frac{1}{2^{k+1}} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1 - \frac{1}{2^{k+1}}}{\frac{1}{2}} = 2(1 - \tfrac{1}{2^{k+1}}) = 2 - \tfrac{1}{2^k}.$$

Þegar $k \to \infty$ þá $\frac{1}{2^{k+1}} \to 0$ svo að $s_k \to 2$. Því er $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.

Þessi niðurstaða veitir innsýn í ævafornt vandamál sem kennt er við grikkjann Zeno. Akkiles skaut manna best af boga. Zeno leiddi samt rök að því að örvar Akkilesar kæmust samt aldrei í mark. Þegar Akkiles skýtur örinni þarf hún fyrst að fara helminginn af leiðinni að skotmarkinu ($\frac{1}{2}$ af heildar vegalengdinni), svo helminginn af því sem er eftir ($\frac{1}{4}$ af heildar vegalengdinni), svo helminginn af því sem þá er eftir ($\frac{1}{8}$ af heildar vegalengdinni) og svo framvegis. Örin kemst aldrei í mark því að alltaf er einhver smá bútur af vegalengdinni eftir.

Hugsum okkur að Akkiles sé í fjarlægðinni 1 frá skotmarkinu. Vega lengdin sem örin fer samkvæmt uppsetningu Zeno er

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\cdots.$$

Samkvæmt niðurstöðunni hér að ofan er summa þessarar raðar 1 og þar með er örin komin í mark.

Hugsunina í þessu dæmi má nýta til að fá almenna niðurstöðu um kvótaraðir.

Regla. *Kvótaröð $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ er samleitin ef og aðeins ef $|q|<1$. Þegar $|q|<1$ þá er summa raðarinnar gefin með formúlunni*

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}.$$

Skoðum nú dæmi um raðir sem eru ekki samleitnar.

Dæmi. (1) Röðin $\sum_{n=1}^{\infty} n$ er ósamleitin. Skoðum hlutsummurnar og sjáum að

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1+2=3 \\ s_3 &= 1+2+3=6 \\ &\vdots \\ s_k &= a_1+a_2+\cdots+a_k = \frac{k(k+1)}{2}. \end{aligned}$$

Hér er greinilegt að $\lim_{k\to\infty} s_k = \infty$. Því er röðin ósamleitin.

(2) Röðin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er ósamleitin. Útlistun á því hvers vegna er að finna í kennslubók á blaðsíðum 215 og 216. Hins vegar má sýna fram á að ef $p>1$ þá er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ samleitin.

Gagnlegt er að hafa í huga að ef $\lim_{n\to\infty} a_n$ er ekki til eða ef markgildið er ekki jafnt 0, þá er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ósamleitin. Hinsvegar þá er vel mögulegt að $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ en röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sé samt ósamleitin. Dæmi um það er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Þegar við fáum í hendurnar óendanlega röð þá er fyrsta verkefnið að úrskurða hvort röðin er samleitin eða ekki. Ýmsar aðferðir eru til að gera það en svo til allar byggja á því að bera röðina saman við raðir sem við vitum fyrir víst hvort eru samleitnar eða ekki. Þar eru notadrýgstar kvótaraðir. Við getum ekki gefið stranga fræðilega útlistun á því hvernig þessi próf virka heldur er ætlunin að gefa aðeins

Dæmi. Skilgreinum $0! = 1$ og síðan $n! = 1\cdots 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n$. Skoðum nú röðina

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!} = 1+\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}+\tfrac{1}{3!}+\cdots.$$

Ef við lítum í bili fram hjá fyrsta liðnum í röðinni þá höfum við röðina

$$\tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{4!} \cdots$$

sem við getum borið saman við röðina

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2^3} + \cdots.$$

Fyrsti og annar liður í neðri röðinni eru jafnir samsvarandi liðum í efri röðinni en eftir það eru liðirnir í neðri röðinni stærri en samsvarandi liðir í efri röðinni. Neðri röðin er samleitin og þar sem allir liðirnir í báðum röðunum eru jákvæðir þá getum við ályktað að efri röðin sé samleitin og að summa hennar er í mesta lagi jöfn summu þeirrar neðri. Sjáum þá að

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!} = 1 + (\tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \cdots) \leq 1 + (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \cdots) = 1 + 2 = 3.$$

Í 10. kafla sjáum við að

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!} = e = 2,718\ldots.$$

Eins og áður sagði er oft athugað hvort gefin röð er samleitin með því að bera hana saman við kvótaröð. Ein hentug leið til að gera slíkan samanburð er svo kallað *kvótapróf*.

Regla. *Látum $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vera röð þannig að $a_n > 0$ fyrir öll n. Ef*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \tfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

þá er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ samleitin.

Einnig fæst að ef til er tala $q < 1$ þannig að um öll gildi á n gildir að $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ þá er röðin samleitin.

Athugið að ef $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ þá er röðin ósamleitin.

Dæmi. Er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, þar sem x er einhver föst tala, samleitin?

Hér setjum við $a_n = \frac{x^n}{n!}$. Reiknum

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x^{n+1}n!}{x^n(n+1)!} = \frac{x \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)} = \frac{x}{n+1}.$$

Nú sjáum við að $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$ og því er röðin samleitin. Síðar fæst að

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{x^n}{n!} = e^x.$$