Háskóli Íslands
Raunvísindadeild

Miðvikudagur 31. október 2001

Stærðfræði N
Misserispróf – lausnir

Dæmi 1: Hver líter af bensíni inniheldur á milli 0,1 og 0,4 grömm af blý. Meðalnotkun bíls er á milli 1200 og 1400 lítrar á ári. Reiknið út hve mikil blýmengun er af 10^5 bílum. Finnið bæði efri og neðri mörk.

Lausn. Lágmarks bensíneyðsla á ári er 1200 lítrar svo $10^5 = 100.000$ bílar eyða að minnsta kosti 120.000.000 lítrum af bensíni á ári. Hver líter inniheldur að minnsta kosti 0,1 gramm af blý svo að blýmengun frá bílunum er að minnsta kosti 12.000.000 grömm, eða 12 tonn. Bílarnir nota í mesta lagi 140.000.000 lítra af bensíni sem innihalda í mesta lagi 0,4 grömm af blý hver. Blýmengunin er því í mesta lagi 56.000.000 grömm eða 56 tonn.

Dæmi 2: Vitað er að um 100 manns í 1.000.000 manna borg hafa sýkst af alvarlegum sjúkdómi. Til er próf til að greina sjúkdóminn. Prófið er þannig að 1% líkur eru á að sýktur einstaklingur greinist sem ósýktur og 0,01% líkur eru á að ósýktur einstaklingur greinist sem sýktur. Ef allir borgarbúar gangast undir prófið, hvað má þá búast við að margir fái ranga sjúkdómsgreiningu?

Lausn. Gerum ráð fyrir að nákvæmlega 100 séu sýktir. Af þeim 100 sem eru sýktir má búast við að prófið sýni réttilega að 99 séu sýktir en 1 greinist ósýktur. Af þeim 999.900 borgarbúum sem eru ósýktir má búast við að prófið sýni ranglega að 100 séu sýktir. Því má búast við að 101 borgarbúi fái ranga sjúkdómsgreiningu.

Dæmi 3: Við mælingu á ABO-blóðflokkum 1526 Íslendinga komi í ljós að 519 reyndust hafa mótefnisvaka A, 192 höfðu mótefnisvaka B og 853 höfðu hvorki mótefnisvaka A né B. Hve margir höfðu báða mótefnisvakana.

Lausn. Þeir sem eru bæði með mótefnisvaka A og B eru tvítaldir, aðrir eru ekki tvítaldir. Þegar lagður er saman fjöldi þeirra sem hafa mótefnisvaka A, þeirra sem hafa mótefnisvaka B og þeirra sem hafa hvorugan mótefnisvakan fæst talan 1564. Því hafa 38 verið tvítaldir og fjöldi þeirra sem hafa bæði mótefnisvaka A og B er því 38.

[Viðbót: Meðal Íslendinga eru 31% með blóðflokk A, 11% með blóðflokk B, 2% með blóðflokk AB og 56% með blóðflokk O. Alltaf vantar blóð í Blóðbankann.]

Dæmi 4: Vitað er að punkturinn $(2, y)$ liggur á beinu línunni sem fer í gegnum punktana $(1, 5)$ og $(4, 3)$. Finnið y.

Lausn. Hallatala línunnar er $h = (3 - 5)/(4 - 1) = -\frac{2}{3}$. Þegar x hækkar um 1 þá breytist y um $-\frac{2}{3}$. Þar sem punkturinn $(1, 5)$ er á línunni þá er punkturinn $(2, 5 - \frac{2}{3}) = (2, 4\frac{1}{3})$ líka á línunni.

Dæmi 5: Altari véfréttarinnar í Delfí var teningslaga. Eitt sinn ráðlagði véfréttin Grikkjum að eina leiðin til að forðast yfirvofandi plágu væri að gera nýtt teningslaga altari sem hefði tvöfalt meira rúmmál en gamla altarið. Hver átti hliðarlengd nýja altarinsins að vera miðað við hliðarlengd gamla altarinsins?

Lausn. Segjum að hliðarlengd gamla altarisins sé a. Rúmmál þess er þá a^3. Ef nýja altarið hefur hliðarlengd b þá viljum við að $b^3 = 2a^3$, eða að $b = \sqrt[3]{2a^3} = \sqrt[3]{2}a$.

[Viðbót: Þetta dæmi er þekkt í stærðfræðisögunni. Grikkir vildu ákvarða nýju hliðarlengdina út frá þeirri gömlu með hringfara og reglustiku. Í þeim búningi er gefið strik af lengd 1 og við eigum að afmarka með hringfara og reglustiku strik með lengd

$\sqrt[3]{2}$. Meir en 2000 árum eftir að Grikkir velta þessu fyrir sér var sýnt að þetta er ekki hægt. Grikkir veltu líka fyrir sér hvort hægt væri að finna aðferð til að þrískipta gefnu horni með hringfara og reglustiku, og hvort hægt væri með sömu áhöldum að að teikna ferning sem hefði sama flatarmál og hringur með geisla 1. Ekkert þessara verkefna er hægt að leysa. Sannanir byggja á framförum í algebru á 18. og 19. öld.]

Dæmi 6: Hæð ljósastaurs er 5 metrar. Hve löngum skugga varpar staurinn ef sólin er í 40° hæð yfir sjóndeildarhringnum?

Lausn. Sjáum að

$$\tan 40^\circ = \frac{\text{hæð staurs}}{\text{lengd skugga}},$$

svo að

$$\text{lengd skugga} = \frac{\text{hæð staurs}}{\tan 40^\circ} \approx 5,96.$$

Dæmi 7: Á árinu 2000 fjölgaði Íslendingum um 1,4% og voru 283.000 í árslok 2000. Ef fjölgunin verður eins um alla ókomna tíð, hvað munu þá líða mörg ár þangað til Íslendingar verða 1 milljón?

Lausn. Fjöldi Íslendinga eftir n ár er þá $283.000\cdot(1,014)^n$. Þurfum að leysa jöfnuna

$$283.000\cdot(1,014)^n = 1.000.000, \quad \text{eða} \quad (1,014)^n = \frac{1.000.000}{283.000} \approx 3,534.$$

Tökum logra af báðum hliðum og fáum að $\log(1,014)^n \approx \log 3,534$ sem gefur að $n\log 1,014 \approx \log 3,534$. Því er

$$n = \frac{\log 3,534}{\log 1,014} \approx 90,8.$$

Því munu líða tæplega 91 ár þangað til Íslendingar verða orðnir 1.000.000 talsins.

Dæmi 8: Finnið andhverfu fallsins $y = 6\cdot 5^x$.

Lausn. Tökum logra af báðum hliðum og fáum að

$$\log y = \log(6\cdot 5^x) = \log 6 + x\log 5.$$

Fáum svo andhverfuna með að einangra x:

$$x = \frac{\log y - \log 6}{\log 5}.$$

Dæmi 9: Reiknið

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}.$$

Lausn.

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2xh+h^2) - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$$

Dæmi 10: Hæð flóar sem stekkur er gefin sem fall af tíma með formúlunni

$$h = (4,4)t - (4,9)t^2.$$

Finnið mestu hæð sem flóin nær.

Lausn. Reiknum $h' = 4,4 - 9,8t$. Eina lausnin á $h' = 0$ er í $t = 4,4/9,8 \approx 0,45$. Reiknum nú $h'' = -9,8$. Í punktinum þar sem $h' = 0$ er $h'' < 0$ svo h tekur hágildi í þessum punkti og það er greinilega hæsta gildið sem h tekur. Þegar $t = 0,45$ þá er $h = 0,99$.

Rögnvaldur G. Möller