# Stærðfræði N – blað 15

Efni fyrir upprifjunartíma 4.12.2001

**Hornaföll:**

Almennt eru hornaföll skilgreind með því að nota einingarhring samanber mynd hér fyrir neðan til vinstri. Fyrir horn sem eru á milli $0°$ og $90°$ má líka hugsa hornaföllin sem hlutföll hliða í rétthyrndum þríhyrningi.

**Dæmi 1:** Tveir menn fylgjast með veðurloftbelg frá stöðvum sem eru í 2 km fjarlægð frá hvor annari. Mennirnir mæla hvað sjónlína yfir í belginn myndar stórt horn við jörðu. Annar maðurinn mælir $40°$ og hinn mælir $70°$. Vitað er að belgurinn er beint yfir línunni sem liggur á milli athugannastöðvanna. Finnið hæð belgsins yfir jörðu.

**Dæmi 2:** Sýnið að flatarmál þríhyrnings með hliðarlengdir $a, b, c$ og horn $A, B, C$ (hliðin á móti horninu $A$ hefur lengd $a$) er

$$\tfrac{1}{2}ab\sin C = \tfrac{1}{2}ac\sin B = \tfrac{1}{2}bc\sin A.$$

**Prósentur og vöxtur:**

Hér erum við að hugsa annars vegar um dæmi þar sem ákveðin prósenta bætist við regluleg, t.d. vextir sem leggjast við höfuðstól um áramót, og hins vegar um stærð sem vex stöðugt þannig að vaxtarhraðinn á hverju augnabliki er í réttu hlutfalli við stærðina sjálfa. Í báðum tilvikum fæst að stærðin $y$ reiknast sem fall af tíma samkvæmt formúlunni $y(t) = y_0 q^t$, þar sem $y_0$ er stærð við tíma $t = 0$. Þegar við erum að hugsa t.d. um vexti sem leggjast við höfuðstól um áramót þá gefur formúlan aðeins rétta niðurstöðu þegar $t$ er heiltala.

**Dæmi 3:** Fyrstu vikurnar eftir fæðingu þá þyngist barn í réttu hlutfalli við þyngd sína. Barn sem vóg 4 kg við fæðingu er orðið 4,4 kg eftir tvær vikur. Hver var þyngd þess 5 dögum eftir fæðingu?

**Dæmi 4:** Finnið helmingunartíma geislavirks efnis ef 99,57% af upphaflegu magni eru eftir að ári liðnu.

**Lograkvarðar:**

Oft á tíðum er erfitt að teikna upp graf ef ásarnir eru merktir á venjulegan hátt, það getur t.d. verið af því að að stærðirnar liggja á of stóru bili. Stundum er hægt að skýra myndina með því að nota lograkvarða á annan eða báða ásana. Þegar notaður er lograkvarði á ás þá táknar fast bil á ásnum ekki ákveðna aukningu á stærð heldur að stærðin margfaldast með fastri tölu, t.d. gæti 1 cm á ás táknað að talan við hægri enda bilsins er tíföld talan vinstramegin. Ef $y = aq^x$ og við veljum lograkvarða á $y$-ásinn þá fæst bein lína með hallatölu $\log q$ og skurðpunkt við $y$ ás í $y = \log a$. Ef $y = ax^n$ og við notum lograkvarða á báða ása þá fæst graf sem er bein lína með halltölu er $n$ og skurðpunktur við $y$-ás er í $y = \log a$.

**Dæmi 5:** Virkni ensýms minnkar við áhrif sólarljóss. Látum $y$ tákna styrk ensýmsins sem fall af tíma. Fræðilegt líkan bendir til þess að $y = aq^t$ þar sem $a$ og $q$ eru fastar. Eftirfarandi tölur fengust úr mælingum

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ (mínútur) | 0 | 10 | 30 | 50 | 60 | 70 | 80 |
| $y$ ($\mu$g/10 ml) | 121 | 74 | 30 | 12 | 6,7 | 3,7 | 2,0 |

Notið teikningu til að meta $a$ og $q$.

**Hámörkun:**

Dæmin hér á eftir eru þannig að fyrst þarf að setja upp stærðfræðilegt líkan að verkefninu, þ.e.a.s. innleiða breytur, finna út hvaða gildi eru lögleg fyrir breyturnar og síðan að finna jöfnur fyrir tengsl breytanna. Þegar maður er búinn að finna formúlu fyrir þeirri stærð sem maður vill hámarka (eða lágmarka) þá er hægt að nota diffrun til að finna þau útgildi sem stærðin tekur og þannig að finna hámark (eða lágmark).

**Dæmi 6:** Girða á af rétthyrningslaga reit. Reiturinn liggur upp að löngum steyptum vegg svo ekki þarf að girða eina hliðina. Við höfum girðingarefni í samtals 100 m af girðingu. Hvað er hægt að girða af stóran reit?

**Dæmi 7:** Hvernig er hagkvæmast að sívalningislega dós með rúmmál $V$ sé í laginu? (Hagkvæmast táknar hér að yfirborðsflatarmál sé sem minnst. Rúmmál dósar með hæð $h$ og grunnflöt með geisla $r$ er $V = \pi r^2 h$ og yfirborðsflatarmálið er $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$.)

**Dæmi 8:** Flutningaþjónusta tekur við rétthyrndum pökkum sem eru þannig að summan af hæð, breidd og lengd er ekki meiri en 1 m. Hvað er mesta mögulega rúmmál pakka sem hægt er að senda með þessari flutninga þjónustu?

**Keðjureglan:**

Keðjureglan er mikilvægasta reiknireglan umdiffrun. Hún segir að

$$\Big(f(g(x))\Big)' = f'(g(x))g'(x).$$

Þegar á diffra á samsett fall diffrar maður fyrst ytra fallið, og svo margfaldar maður með afleiðu innrafallsins.

**Náttúrlegur logri og veldisvísisföll:**

Náttúrlegi logrinn $\ln x$ er meira notaður í stærðfræði en 10-logrinn $\log x$. Andhverfa náttúrlega lograns er fallið $e^x$. Logra með grunntölu $a > 0$, þ.e.a.s. $\log_a x$, og almennt veldisvísisfall $a^x$ má rita með aðstoð þessara falla, þannig að

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad \text{og} \qquad a^x = e^{x \ln a}.$$

Formúlurnar fyrir afleiðum $\ln x$ og $e^x$ eru einstaklega smekklegar:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \qquad \text{og} \qquad \frac{d}{dx}e^x = e^x.$$

**Dæmi 9:** Diffrið eftirfarandi föll með tilliti til $x$:

$$[f(\sqrt{x})]^2 \qquad \ln\ln x \qquad x^{\sqrt{x}} \qquad \sqrt{\frac{\cos f(x)}{\sin f(x)}}.$$

**Dæmi 10:** Weibull-líkanið er afar vinsælt þegar verið er að meta líftíma lífvera eða endingartíma hluta. Fallið $S(t)$ segir til um líkur þess að ævi einstaklings verði lengri en $t$. Tveir stikar, $\lambda$ og $\beta$ eru í líkaninu og formúlan fyrir $S(t)$ er $S(t) = e^{-(\lambda t)^\beta}$. Fyrir *Drosophilia melanogaster* (bananafluga) mælum við $t$ í dögum og í tilraun fengust eftirfarandi gildi á $\lambda$ og $\beta$:

| Kyn | $\lambda$ | $\beta$ |
|---|---|---|
| Karlkyn | 0,019 | 3,41 |
| Kvenkyn | 0,022 | 3,24 |

(a) Finnið út tíma $t_{\frac{1}{2}}$ fyrir hvort kyn þannig að líkurnar á að einstaklingur lifi lengur en þessi tími séu nákvæmlega $\frac{1}{2}$.

(b) Ef þið hefðuð karlflugu og kvenflugu, hvor þeirra mynduð þið gera ráð fyrir að lifði lengur? (Aðeins utan við námsefnið.)

Rögnvaldur G. Möller