Stærðfræði N

Efni fyrir upprifjunartíma 3.12.2001

Hornaföll:

Almennt eru hornaföll skilgreind með því að nota einingarhring samanber mynd 5.7, bls. 116 í bók. Fyrir horn sem eru á milli 0° og 90° má líka hugsa hornaföllin sem hlutföll hliða í rétthyrndum þríhyrningi, sjá bls. 123 í bók.

Dæmi 1: Vitað er um hornið α að það er hvasst (alltsvo $\alpha < 90^\circ$) og að $\cos\alpha = 5/13$. Reiknið út eftirfarandi stærðir, án þess að nota reiknivél til að finna hornið α

$$\sin\alpha \qquad \tan\alpha \qquad \cos 2\alpha \qquad \cos(180^\circ - \alpha).$$

Dæmi 2: Hringlaga kaka hefur geisla 15 cm. Gummi gráðugi sker af kökunni bita þannig að skurðurinn er beinn og í fjarlægð 5 cm frá miðju kökunnar. Hvert er flatarmál bitans sem Gummi skar af kökunni?

Prósentur og vöxtur/hnignun:

Hér erum við að hugsa annars vegar um dæmi þar sem ákveðin prósenta bætist við/dregst frá regluleg, t.d. vextir sem leggjast við höfuðstól um áramót, og hins vegar um stærð sem vex/hnignar stöðugt þannig að vaxtarhraðinn/hnignunarhraðinn á hverju augnabliki er í réttu hlutfalli við stærðina sjálfa. Í báðum tilvikum fæst að stærðin y reiknast sem fall af tíma samkvæmt formúlunni $y(t) = y_0 q^t$, þar sem y_0 er stærð við tíma $t = 0$. Þegar við erum að hugsa t.d. um vexti sem leggjast við höfuðstól um áramót þá gefur formúlan aðeins rétta niðurstöðu þegar t er heiltala.

Dæmi 3: Íbúafjöldi lands nokkurs eykst um sömu prósentu tíu ár í röð þannig að í lok tímabilsins er fólksfjöldinn orðinn tíu prósentum meiri en hann var í upphafi. Að þessum tíu árum liðnum þá versna lífsskilyrði og í tíu ár verður stöðug fólksfækkun (alltaf sama prósentutala á hverju ári) þannig að í lok tímabilsins er fólskfjöldinn sá sami og hann var tuttugu árum áður.

Um hve mörg prósent fjölgaði fólkinu á hverju ári meðan á fyrra tímabilinu stóð og um hve mörg prósent fækkaði því á hverju ári meðan á seinna tímabilinu stóð?

Dæmi 4: Polonium-210 hefur helmingunartíma 140 dagar. Gerum ráð fyrir að núna höfum við 200 mg af efninu. Ritið formúlu fyrir magni efnisins sem falli af tíma. Hvað er mikið eftir þegar 100 dagar eru liðnir? Hvað langur tími þarf að líða þar til bara 10 mg eru eftir?

Hámörkun:

Dæmið hér á eftir eru þannig að fyrst þarf að setja upp stærðfræðilegt líkan að verkefninu, þ.e.a.s. innleiða breytur, finna út hvaða gildi eru lögleg fyrir breyturnar og síðan að finna jöfnur fyrir tengsl breytanna. Þegar maður er búinn að finna formúlu fyrir þeirri stærð sem maður vill hámarka (eða lágmarka) þá er hægt að nota diffrun til að finna þau útgildi sem stærðin tekur og þannig að finna hámark (eða lágmark).

Dæmi 6: Girða á af rétthyrningslaga reit. Reiturinn liggur upp að löngum steyptum vegg svo ekki þarf að girða eina hliðina. Við höfum girðingarefni í samtals 100 m af girðingu. Hvað er hægt að girða af stóran reit?

Lograföll:

Logri með grunntölu $a > 0$ er táknaður $\log_a$. Um hann gildir að

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y.$$

Náttúrlegi logrinn hefur grunntölu $e = 2,71828\ldots$.

Í grein 10.7 í bók er sýnt hvernig á að diffra logra og veldisvísisföll.

Dæmi 6: a) Hvor talan $\log_{10} 99$ eða $\log_9 82$ er stærri? (Ekki nota reiknivél.)

b) Einagrið y út úr eftirfarandi jöfnum:

$$3^y = 2^{y+1} \qquad 3^y = 3\log x \qquad \ln(10\ln y) = \ln 5x.$$

.

Dæmi 7: Dæmi 7.3.3 í bók.

Dæmi 8: Finnið og flokkið staðbundna útgildispunkta fallanna

$$y = \ln(x^2+1) - x \qquad \text{og} \qquad y = x^2e^x.$$

Keðjureglan:

Keðjureglan er mikilvægasta reiknireglan umdiffrun. Hún segir að

$$\Big(f(g(x))\Big)' = f'(g(x))g'(x).$$

Þegar á diffra á samsett fall diffrar maður fyrst ytra fallið, og svo margfaldar maður með afleiðu innrafallsins.

Dæmi 9: Diffrið eftirfarandi föll með tilliti til x:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^{3/2} \qquad \sqrt[3]{1+\sqrt{x}} \qquad y = \cos(\tan x).$$

Diffurjöfnur.

Oft á tíðum höfum við ekki beinar upplýsingar um áhugaverða stærð heldur höfum við upplýsingar um hve hratt stærðin breytist með tíma. Þetta leiðir til diffurjöfnu.

Jafna sem má rita á forminu

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(x)$$

kallast *aðgreinanleg.* Þegar glímt er við slíkar jöfnur þá gefst oft vel að rita

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \quad \text{og svo} \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx.$$

Svo reiknum við stofnföllin og þá höfum við jöfnu

$$H(y) = F(x) + C,$$

þar sem $F(x)$ er stofnfall $f(x)$ og $H(y)$ er stofnfall $1/g(y)$. Út úr þessari síðustu jöfnu má stundum einangra y í það minnsta höfum við fengið jöfnu sem tengir x og y.

Dæmi 10: Finnið lausn á diffurjöfnunni $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$ þannig að $y(0) = 1$.

Dæmi 11: Vatn rennur úr tanki út um gat niður við botn hans. Segjum að tankurinn sé sívalningslaga og hæð hans sé 6 metrar og geisli botnflatar sé 2 metrar. Látum y tákna vatnshæðina í tankinum. Samkvæmt lögmáli Toricellis þá er

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{72}\sqrt{y}.$$

a) Leysið diffurjöfnuna.

b) Hve lengi er tankurinn að tæmast?

Rögnvaldur G. Möller