Stærðfræði N – Línuleg jöfnuhneppi

Inngangur

Jafna af taginu

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

kallast línuleg jafna. Það sem auðkennir línulegar jöfnur er að breyturnar koma bara fyrir í 1. veldi og engin margfeldi tveggja eða fleiri breyta koma fyrir í jöfnunni. Ef bara ein breyta kemur fyrir þá erum við með jöfnu af taginu $a_1x_1 = b$ og lausnin blasir við. Ef breyturnar eru tvær þá höfum við jöfnu af taginu $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ og lausnirnar eru óendanlega margar. Skoða má slíka jöfnu sem jöfnu línu í plani. Í hagnýtingu kemur oft upp sú staða að breyturnar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sem við höfum áhuga á þurfa að uppfylla nokkrar línulegar jöfnur samtímis. Þá fáum við það sem kallast línulegt jöfnuhneppi

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m.
\end{aligned}$$

Slík jöfnuhneppi koma víða upp, bæði innan stærðfræðinnar og í hagnýtingum á stærðfræði. Í ýmsum verkefnum af rúmfræðilegum toga þá eru breyturnar fáar, t.d. ef finna á skurðpunkt tveggja lína í plani eru breyturnar bara 2, en í hagnýtingum koma oft upp jöfnuhneppi með þúsundum eða jafnvel tugþúsundum breyta. Það er sérstök fræðigrein að leysa slík jöfnuhneppi, því þegar jöfnuhneppin eru orðin svona stór þá duga jafnvel öflugustu tölvur ekki til að leysa verkefnin ef beitt er óhagkvæmri leið.

Markmið þessa pistils er að fjalla um hvernig leysa má línulegt jöfnuhneppi á skipulegan hátt. Línulegt jöfnuhneppi getur haft enga lausn (upplýsingarnar um $x_1, \ldots, x_n$ sem felast í jöfnunum stangast á), nákvæmlega eina lausn, eða þá að jöfnuhneppið hefur óendanlega margar lausnir. Við munum greina hvernig á að þekkja þessi ólíku tilvik og hvernig á að meðhöndla þau.

1 Hvernig á að leysa jöfnuhneppi

Skoðum tvær hugmyndir að lausn á jöfnuhneppi. Fáum gefnar jöfnurnar

$$x + y = 3 \qquad \text{og} \qquad x + 2y = 4.$$

Fyrri lausnin byggir á því að við einangrum y út úr annarri jöfnunni, t.d. þeirri fyrri, og fáum $y = 3 - x$ og síðan styngum við þessari formúlu fyrir y inn í seinni jöfnuna og erum þá komin með línulega jöfnu $x + 2(3 - x) = 4$ með einni breytistærð x. Leysum hana, fá um að $x = 2$ og út frá því reiknum við að $y = 1$.

Seinni lausnin byggir líka á því að reyna að fá jöfnu með einni breytistærð en við förum öðruvísi að. Við "drögum" fyrri jöfnuna frá þeirri seinni og fáum að $y = 1$.

Það getum við svo sett inn í fyrri jöfnuna til að fá að $x + 1 = 3$ sem gefur svo $x = 2$. Munurinn á þessum tveimur aðferðum er að í þeirri seinni þá lögum við fyrst jöfnuhneppið til að fá fast ákveðið gildi á y til að setja inn í fyrri jöfnuna.

Þegar fengist er við stærri jöfnuhneppi þá kemur strax í ljós að fyrri hugmynd er ómeðfærileg, en sú seinni gengur mun betur.

2 Aðferð Gauss með endurinnsetningu

Fyrsta skrefið er að setja upp þjálli rithátt. Við byrjum með jöfnuhneppi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Hægt er að skammstafa upplýsingarnar sem felast í jöfnuhneppinu með því að sleppa því að skrifa breytuheitin, aðgerðamerkin og jafnaðarmerkið og fá í staðinn það sem kallað er *aukið fylki*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right].$$

Fyrsta línan hér að ofan samsvarar fyrstu jöfnunni í jöfnuhneppinu og svo framvegis.

Hægt er að framkvæma ýmsar aðgerðir á línulegu jöfnuhneppi án þess að breyta lausnamenginu. Til dæmis má augljóslega breyta röðinni á jöfnunum án þess að breyta hvaða lausnir jöfnuhneppið hefur. Einnig má margfalda báðar hliðar jöfnu með fasta $r \neq 0$ og taka margfeldi af jöfnu og leggja við einhverja aðra jöfnu. Þegar við hugsum um aukið fylki þá sjáum við að hægt er að framkvæma eftirfarandi þrjár aðgerðir á fylkinu án þess að breyta því hvaða lausnir samsvarandi jöfnuhneppi hefur. Við getum

(Að1) Við getum vixlað á einhverjum tveimur línum.

(Að2) Við getum margfaldað línu með fasta $r \neq 0$.

(Að3) Í stað línu L_i getum við sett summu $L_i + rL_j$ þar sem $j \neq i$.

Athugið að þegar línuaðgerð er beitt á aukið fylki þarf að muna eftir að beita henni líka á dálkinn yst til hægri. Ef hægt er að breyta auknu fylki $[A|b]$ yfir í aukið fylki $[A'|b']$ með þessum aðgerðum segjum að að þessi tvö auknu fylki séu *jafngild*.

Sagt er að aukið fylki sé á *efra stallaformi* ef eftirfarandi tvö skilyrði eru uppfyllti:

(ES1) Línur sem innihalda bara 0 eru neðst í fylkinu.

(ES2) Um hverja línu gildir að fyrir neðan (í sama dálki) fremsta ekki 0 stakið eru bara 0.

Dæmi.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Hér að ofan er fyrsta fylkið á efra stallaformi, það næst er ekki á efra stallaformi því skilyrði ES1 er brotið og síðasta fylkið er ekki heldur á efra stallaformi því skilyrði ES2 er brotið.

Byrjum nú með jöfnuhneppi og tilheyrandi aukið fylki. Fyrsta skrefið í lausnaraðferðinni gengur út á að nota línuaðgerðir til að koma aukna fylkinu yfir á efra stallaform.

Dæmi Leysið jöfnuhneppið

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + 2y + 3z &= 2 \\ x + 3y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

Lausn. Stillum upp auknu fylki

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

Notum svo línuaðgerðir til að breyta aukna fylkinu þannig að við fáum fylki á efra stallaformi.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - 2L_2 \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -L_3 \end{array} \end{aligned}$$

Ef þetta er ritað aftur á formi jöfnuhneppis þá fæst að

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ y + 2z &= 1 \\ z &= -1. \end{aligned}$$

Trikkið er að þegar við höfum náð fram efra stallaformi þá er tiltölulega auðvellt að lesa út lausn á jöfnuhneppinu. Rekjum okkur upp á við frá neðstu jöfnunni og fáum að $z = -1,\ y = 3$ og $x = -1$.

Dæmi. Leysið jöfnuhneppið

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 0 \\ 2x + 5y - 3z &= 0 \\ -3x + 2y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

Lausn. Setjum upp aukið fylki og vinnum á því með línuaðgerðum.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -10 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 + 3L_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 + 11L_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -L_2 \\ \\ \end{array}$$

Loka fylkið hér að ofan samsvarar jöfnuhneppinu

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 0 \\ y - z &= 0 \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Lesum út úr þessum jöfnum að eina lausnin er $z = 0$, $y = 0$ og $x = 0$.

Í þessu dæmi er bara 0 í hægri hlið jöfnuhneppis. Slík jöfnuhneppi kallast *óhliðruð*. Tökum eftir að sama hvaða línuaðgerðum við beitum þá breytist ekki að það eru bara 0 í hægri hlið. Þegar við fáumst við óhliðruð jöfnuhneppi þá má spara sér skriftir og sleppa því að rita dálkin lengst til hægri í fylkinu – í honum verða hvort sem er alltaf bara 0.

3 Engin lausn

Jöfnuhneppin sem við höfum leyst hér að fram hafa öll nákvæmlega eina lausn. Svo þarf alls ekki að vera því bæði getur komið fyrir að jöfnuhneppi hafi alls enga lausn eða að jöfnuhneppið hefur óendanlegamargar lausnir. Þegar jöfnuhneppi hefur enga lausn segjum við að það sé *ósamkvæmt*.

Dæmi. Skoðum jöfnuhneppið

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ y + 2z &= 3 \\ x + 3y + 5z &= 9 \end{aligned}$$

Byrjum á að setja upp aukið fylki og juðumst svo í því með línuaðgerðum.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - 2L_2 \end{array}.$$

Samsvarandi hverri línu í auknu fylki er jafna. Jafna sem samsvarar neðstu línunni í fylkinu hér að ofan er $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 1$ og augljóslega er engin leið að finna gildi á x, y og z sem uppfylla jöfnuna. Því getum við ályktað að að jöfnuhneppið hafi alls enga lausn.

Þetta er nákvæmlega það sem gerist alltaf þegar við reynum að leysa ósamkvæmt jöfnuhneppi með aðferðinni sem lýst er hér að framan: fyrr eða síðar fáum við línu í fylkinu sem er bara með 0 í vinstri hlið en í dálkinum til hægri er einhver tala sem er ekki 0. Að svo búnu getum við hætt glímunni við jöfnuhneppið og fullyrt að jöfnuhneppið hafi enga lausn. Takið eftir að ef við höfum óhliðrar jöfnuhneppi (bara 0 í hægri hlið) þá hefur jöfnuhneppið alltaf lausn: ef öllum breytum er gefið gildið 0 þá eru allar jöfnurnar uppfylltar.

4 Óendanlega margar lausnir

Í mörgum tilfellum þá eru upplýsingarnar sem felast í línulegu jöfnuhneppi ekki nógar til að ákvarða lausnina ótvírætt. Slík verkefni koma eðlilega upp í mörgum tilvikum. Þó að við getum ekki ákvarðað gildi fyrir breyturnar ótvírætt þá getum við fengið lýsingu á öllum mögulegum lausnum.

Dæmi. Skoðum jöfnuhneppið

$$\begin{aligned} x+y+z &= 2 \\ y+2z &= 3 \\ x+3y+5z &= 8 \end{aligned}$$

Byrjum á að setja upp aukið fylki og ráðumst að því með línuaðgerðum.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right] \; L_3 - L_1 \qquad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}\right] \; L_3 - 2L_2 \; .$$

Nú höfum við bara tvær jöfnur

$$x+y+z=1 \qquad \text{og} \qquad y+2z=3.$$

Setjum $z=r$ og fáum að $y=3-2z=3-2r$ og $x=1-y-z=1-(3-2r)-r=-2+r$. Sama hvaða tala er sett í staðinn fyrir r, alltaf fæst lausn á jöfnuhneppinu.

Skoðum hvernig tilfellið að jöfnuhneppi hafi óendanlega margar lausnir birtist þegar við notum lausnaraðferðina hér að ofan á jöfnuhneppi.

Hugsum okkur að við séum búin að koma aukna fylkinu yfir á efri stallgerð. og höfum fengið eftirfarandi niðurstöðu

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \underline{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Í hverri línu beinum við athyglinni að fyrsta stakinu sem er ekki 0. Köllum þau stök *vendistuðla*. Í fylkinu hér að ofan er búið að strika undir vendistuðlana. Hér eru vendistuðlarnir í dálkum 1, 4 og 5 og enginn vendistuðull í dálkum 2 og 3. Breyturnar sem tilheyra dálkum með engum vendistuðli er oft kallaðar *frjálsar*. Beint liggur við að lýsa lausnum jöfnuhneppisins með því að sýna hvaða gildi hinar breyturnar fá ef við gefum frjálsu breytunum einhver gildi.

Dæmi. Hvaða lausnir hefur jöfnuhneppið sem lýst er með eftirfarandi auknu fylki

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \underline{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Hér eru enginn vendistuðull í 2. og 3. dálki. Því getum við skoðað tilheyrandi breytur x_2 og x_3 sem frjálsar. Setjum $x_2 = r$ og $x_3 = s$. Oss til hægðrarauka skulum við rita upp jöfnuhneppið sem samsvarar auknafylkinu. Fáum að

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_4 + x_5 &= 1 \\ x_5 &= 1. \end{aligned}$$

Sjáum útfrá þessu að $x_5 = 1$ og $x_4 = 0$. Síðan gefur efsta jafnan að $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 1 - r - s - 0 - 1 = -r - s$. Gildin á x_4 og x_5 eru fast ákvörðuð og ef við gefum x_2 og x_3 einhver gildi þá má ákvarða x_1.

Í ljós kemur að ef það er vendistuðull í hverjum dálki og jöfnuhneppið er samkvæmt, þá fæst nákvæmlega ein lausn. Annars getum við sagt að breyturnar sem tilheyra dálkum sem hafa ekki vendistuðul séu frjálsar og sett fram lausn á jöfnuhneppinu þannig að ef við gefum frjálsu breytunum einhver gildi er hægt að reikna út gildi á hinar breyturnar.

Dæmi. Leysið jöfnuhneppið

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + 2y - z &= 3 \end{aligned}$$

Setjum upp aukið fylki og komum því á efra stallaform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ L_2 - L_1 \end{array}.$$

Hér eru vendistuðlar í 1. og 2. dálk en enginn í 3. dálk. Skoðum því þriðjubreytuna z sem frjálsa breytu. Set $z = r$. Seinni línan í aukna fylkinu á efri stallgerð samsvarar jöfnunni $y - 2z = 2$ svo að $y = 2 + 2r$. Efri línan segir að

$$1 = x + y + z = x + (2 + 2r) + r = x + 2 + 3r,$$

eða að $x = -1 - 3r$. Lausnina getum við nú ritað á vigurformi sem

$$[x, y, z] = [-1 - 3r, 2 + 2r, r] = [-1, 2, 0] + r[-3, 2, 1].$$

Vigurinn $[-1, 2, 0]$ er lausn á upphaflega jöfnuhneppinu, en vigurinn $r[1, 2, -1]$ er lausn jöfnuhneppis sem er eins og upphaflega jöfnuhneppið nema að í hægri hliðarnar eru allsstaðar komið 0.

Það "munstur" sem koma fram í dæminu hér að ofan gildir líka almennt. Fáum í hendurnar jöfnuhneppi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Í samræmi við það sem áður sagði kallast jöfnuhneppið *hliðrað* ef í hægri hliðinni er einhver tala sem er ekki 0, en *óhliðrað* ef það eru bara 0 í hægri hlið. Hugsum okkur að við höfum fundið einhverja eina lausn hliðraða jöfnuhneppisins og svo höfum við fundið lausn á óhliðraða jöfnuhneppinu sem fæst ef við setjum 0 í stað $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Hugsum okkur að við höfum fundið eina tiltekna lausn á jöfnuhneppinu okkar og höfum ritað hana á vigurformi sem $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [p_1, p_2, \ldots, p_n]$. Einnig höfum við fundið allar lausnir á samsvarandi óhliðruðu jöfnuhneppi. Sérhverja lausn á hliðraða jöfnuhneppinu má nú rita sem

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [p_1, p_2, \ldots, p_n] + [h_1, h_2, \ldots, h_n],$$

þar sem $[h_1, h_2, \ldots, h_n]$ er lausn á óhliðraða jöfnuhneppinu.

5 Sýnidæmi

Að lokum koma tvö dæmi þar sem farið er í gegnum það skref fyrir skref hvernig jöfnuhneppi er leyst. Þessi dæmi og lausnirnar eru fengin frá Jón Ingólfi Magnússyni sem kennir hið bráðskemmtilega námskeið *Línuleg algebra og rúmfræði.*

Dæmi. Beitið Gauss-aðferð og endurinnsetningu til þess að finna allar lausnir jöfnuhneppisins

$$\begin{array}{rrrrrcr}
3x_1 & +3x_2 & -3x_3 & & -2x_5 & = & 3 \\
-x_1 & -x_2 & +2x_3 & -3x_4 & +x_5 & = & 1 \\
x_1 & +x_2 & -2x_3 & & -x_5 & = & 2 \\
x_1 & +x_2 & -x_3 & +4x_4 & & = & -2
\end{array}$$

Lausn: Við setjum fram aukna fylkið sem svarar til þessa hneppis og framkvæmum línuaðgerðir þar til fylkið er komið á efra stallaform:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
3 & 3 & -3 & 0 & -2 & 3 \\
-1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\
1 & 1 & -1 & 4 & 0 & -2
\end{array}\right] \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\
-1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\
3 & 3 & -3 & 0 & -2 & 3 \\
1 & 1 & -1 & 4 & 0 & -2
\end{array}\right] \quad \begin{array}{c} L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1 \\ L_4 \to L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -3 \\
0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -4
\end{array}\right] \quad L_2 \leftrightarrow L_4$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -3 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3
\end{array}\right] \quad L_3 \to L_3 - 3L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} L_4 \to -\frac{1}{3}L_4 \\ L_3 \leftrightarrow L_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -2 & 9 \end{array}\right] \qquad L_4 \to L_4 + 12L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right].$$

Hér er komið fram fylki á efra stallaformi. Einn dálkur þess hefur engan vendistuðul og því hefur lausnin eina frjálsa breytu. Eðlilegt er að taka hana sem x_2 þar sem sú breyta tilheyrir dálknum sem engan hefur vendistuðulinn. Aukna fylkið svarar til jöfnuhneppisins

$$\begin{aligned} x_1+x_2-2x_3 \quad\quad -x_5 &= 2 \\ x_3+4x_4 \;\; +x_5 &= -4 \\ x_4 \quad\quad &= -1 \\ -2x_5 &= -3 \end{aligned}$$

Nú er komið að endurinnsetningu. Við byrjum á því að leysa fyrir breytuna x_5 og rekjum okkur síðan upp eftir hneppinu.

$$x_5 = \frac{3}{2},\; x_4 = -1,\; x_3 = -4-4x_4-x_5 = -\frac{3}{2},\; x_2 = s,\; x_1 = 2-x_2+2x_3+x_5 = \frac{1}{2}-s,$$

þar sem s getur verið hvaða rauntala sem er. Athugið að við getum skrifað lausnina sem

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Dæmi. Beitið Gauss-Jordan-aðferð til þess að finna allar lausnir jöfnuhneppisins

$$\begin{aligned} 3x_1-4x_2+2x_3 \;\; +x_4+12x_5 &= 4 \\ 3x_1-7x_2+8x_3-5x_4 \;\; +8x_5 &= 9 \\ -2x_2+4x_3-4x_4 \;\; -2x_5 &= 6 \end{aligned}$$

Lausn: Við stillum upp aukna fylkinu og beitum einföldum línuaðgerðum þar til fylki á efra stallaformi fæst út:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -4 & 2 & 1 & 12 & 4 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & -2 & 6 \end{array}\right] \qquad L_2 \to L_2 - L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -4 & 2 & 1 & 12 & 4 \\ 0 & -3 & 6 & -6 & -4 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & -2 & 6 \end{array}\right] \qquad L_3 \to L_3 - \tfrac{2}{3}L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -4 & 2 & 1 & 12 & 4 \\ 0 & -3 & 6 & -6 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{array}\right] \qquad L_3 \to \tfrac{3}{2}L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -4 & 2 & 1 & 12 & 4 \\ 0 & -3 & 6 & -6 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} L_1 \to L_1 - 12L_3 \\ L_2 \to L_2 + 4L_3 \end{array}$$

Hér er komið fram fylki á efra stallaformi. Dálkar þrjú og fjögur hafa enga vendistuðla og því tökum við x_3 og x_4 sem frjálsar breytur. Aukna fylkið samsvarar jöfnuhneppinu

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 12x_5 &= 4 \\ -3x_2 + 6x_3 - 6x_4 - 4x_5 &= 5 \\ x_5 &= 4 \end{aligned}$$

Táknum frjálsu breyturnar x_3 og x_4 með s og t. Þá fæst með endurinnsetningu

$$x_5 = 4,\ x_2 = -7 + 2s - 2t,\ x_1 = -24 + 2s - 3t.$$

Við getum skrifað lausnina sem

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -24 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Rögnvaldur G. Möller