Fyrirlestur 23
Eiginvigrar.

Dæmi 23.1: Finnið eigingild og eiginvigra fylkisins $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. (Dæmi 6.1.1l úr [SA].)

Lausn. Fylgjum Reikniaðferð 23.6. Byrjum á að reikna kennimargliðu A:

$$\begin{aligned}
p(t) &= \det(A - tI) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - t\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\begin{bmatrix} 3-t & 1 & 0 \\ 0 & 1-t & 2 \\ 0 & 1 & 2-t \end{bmatrix} \\
&\text{(notum Setningu 22.4 og liðum eftir 1. dálk.)} \\
&= (3-t)\det\begin{bmatrix} 1-t & 2 \\ 1 & 2-t \end{bmatrix} \\
&= (3-t)\big((1-t)(2-t) - 2\big) \\
&= (3-t)(t^2 - 3t) \\
&= -t(t-3)^2.
\end{aligned}$$

Eigingildin eru lausnir jöfnunnar $p(t) = 0$. Lausnirnar eru $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = 3$.

Eigum eftir að finna eiginvigrana. Fyrst finnum við eiginvigrana sem tilheyra eigingildinu $\lambda_1 = 0$. Þeir finnast með því að leysa jöfnuna $(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Þar sem $\lambda_1 = 0$ þá er jafnan sem þarf að leysa $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Setjum A yfir á rutt efrastalla form

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lausnir $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eru því allir vigrar á forminu $(x_1, x_2, x_3) = x_3(\frac{2}{3}, -2, 1)$, og þeir, utan vigurinn $\mathbf{0}$, eru eiginvigrar A tilheyrandi eigingildinu $\lambda_1 = 0$.

Svo er að finna eiginvigra fyrir hitt eigingildið $\lambda_2 = 3$. Þurfum að finna lausnir $(A - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Fáum að

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hér er x_1 er frjáls breyta en $x_2 = 0$ og $x_3 = 0$. Lausnir jöfnunnar $(A - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eru því nákvæmlega allir vigrar á forminu $(x_1, x_2, x_3) = x_1(1, 0, 0)$. Við höfum eiginvigur í höndunum ef $x_1 \neq 0$.

Athugasemd. Sjálfsagt er að prófa hvort vigrarnir sem við fundum eru virkilega eiginvigrar. Það er gert með að margfalda þá með A og athuga hvort útkoman er ekki upphaflegi vigurinn margfaldaður með eigingildinu.

Dæmi 23.2: Sannið að 0 er eigingildi fylkis A ef og aðeins ef A er ekki andhverfanlegt. (Dæmi 6.1.2 úr [SA].)

Lausn. Vitum að ferningsfylki A er ekki andhverfanlegt ef og aðeins ef jafnan $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hefur lausn $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Gerum fyrst ráð fyrir að $\lambda = 0$ sé eigingildi A. Þá er til vigur (eiginvigur) $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ þannig að $A\mathbf{x} = 0\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Fylkið A er ekki andhverfanlegt því jafnan $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hefur aðrar lausnir en núllvigurinn.

Öfugt gildir að ef A er ekki andhverfanlegt þá hefur jafnan $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lausn $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Þessi vigur $\mathbf{x}$ er eiginvigur A með eigingildi 0.

Dæmi 23.3: Látum A vera $n \times n$ fylki.
(a) Sýnið að fylkin A og A^T hafa sömu eigingildi.
(b) Gerum ráð fyrir að þegar stökin í einhverri línu A eru lögð saman þá kemur alltaf út talan s, sama hvaða lína er valin. Sýnið að s er eigingildi A.
(c) Gerum ráð fyrir að þegar stökin í einhverjum dálki A eru lögð saman þá komi alltaf út talan s, sama hvaða dálkur er valinn. Sýnið að s er eigingildi A.

Lausn. **(a)** Við sýnum að fylkin A og A^T hafa sömu kennimargliðu. Reiknum kennimargliðu A^T. Samkvæmt skilgreiningu er kennimargliðan $p_{A^T}(t) = \det(A^T - tI)$. Með því að nota að ákveða breytist ekki við byltingu og að $I^T = I$ fæst að

$$p_{A^T}(t) = \det(A^T - tI) = \det(A^T - tI^T) = \det((A - tI)^T) = \det(A - tI) = p_A(t).$$

Því hafa fylkin A og A^T sömu kennimargliðu. Eigingildin eru rætur kennimargliðunnar og eru því þau sömu fyrir A og A^T.

(b) Við sýnum að vigurinn $\mathbf{x}_0 = (1, 1, \ldots, 1)$ er eiginvigur A með eigingildið s. Reiknum:

$$A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ \vdots \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Því er $A\mathbf{x}_0 = s\mathbf{x}_0$ og $\mathbf{x}_0$ er eiginvigur A með eigingildið s.

(c) Hér getum við nýtt **(a)**- og **(b)**-liði. Um fylkið A^T gildir að stökin í línu i eru þau sömu og stökin í dálki i í A. Summa stakanna í línu i í A^T er því jöfn summu stakanna í dálki i í fylkinu A. Forsendan segir að summa stakanna í hverjum dálki A sé alltaf s og um A^T gildir því að summa stakanna í hverri línu er alltaf s. Samkvæmt **(b)**-lið er s eigingildi A^T og þar sem A og A^T hafa sömu eigingildi þá er s líka eigingildi A.

Dæmi 23.4: Skilgreinum

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}.$$

(a) Sýnið að vigurinn $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1)$ er eiginvigur A óháð því hvaða gildi a og b hafa.
(b) Er mögulegt að $\mathbf{v}_0 = (1, 2, 3)$ sé eiginvigur A?

Lausn. **(a)** Hér má vísa til **(b)**-liðar í Dæmi 23.3 hér að ofan. En líka er einfalt að prófa beint hvort $\mathbf{x}_0$ er eiginvigur. Sjáum að

$$A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b \\ a+2b \\ a+2b \end{bmatrix} = (a+2b) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (a+2b)\mathbf{x}_0.$$

Svo $\mathbf{x}_0$ er eiginvigur og eigingildið er $a+2b$.

(b) Ef $\mathbf{v}_0$ er eiginvigur þá er til tala λ þannig að $A\mathbf{v}_0 = \lambda\mathbf{v}_0$. Athugum hvort hægt er að finna gildi á a, b og λ þannig að $A\mathbf{v}_0 = \lambda\mathbf{v}_0$. Nú er $\lambda\mathbf{v}_0 = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda)$ og

$$A\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+5b \\ 2a+4b \\ 3a+3b \end{bmatrix}.$$

Þegar við stillum upp jöfnunni $A\mathbf{v}_0 = \lambda\mathbf{v}_0$ fæst að

$$\begin{bmatrix} a+5b \\ 2a+4b \\ 3a+3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ 3\lambda \end{bmatrix},$$

og þessar upplýsingar má setja upp sem jöfnuhneppi

$$\begin{aligned} a+5b\ -\lambda &= 0 \\ 2a+4b-2\lambda &= 0 \\ 3a+3b-3\lambda &= 0. \end{aligned}$$

Lausn þessa jöfnuhneppis er $(a, b, \lambda) = \lambda(1, 0, 1)$. Þetta segir að vissulega er mögulegt að $(1, 2, 3)$ sé eiginvigur A og eigingildið λ getur verið hvaða tala sem er, en þá er

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Fyrirlestur 24
Hornalínugeranleiki.

Dæmi 24.1: Skilgreinum

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Finnið eigingild og eiginvigra A. Er fylkið A hornalínugeranlegt (e. diagonalizable)? Ef A er hornalínugeranlegt þá eigið þið að finna fylki P þannig að fylkið $P^{-1}AP$ er hornalínufylki.

Lausn. Fylgjum Reikniaðferð 23.6 til að finna eigingildin og eiginvigrana. Fyrst er að finna kennimargliðu A. Hún er

$$\begin{aligned} p(t) &= \det(A - tI) \\ &= \det \begin{bmatrix} -2-t & 0 & -1 \\ 0 & 2-t & 0 \\ 3 & 0 & 2-t \end{bmatrix} \\ &\text{(liðun eftir línu 2)} \\ &= (2-t)\det \begin{bmatrix} -2-t & -1 \\ 3 & 2-t \end{bmatrix} \\ &= (2-t)\big((-2-t)(2-t)+3\big) \\ &= (2-t)(t^2-1) \\ &= (2-t)(t-1)(t+1). \end{aligned}$$

Eigingildin, lausnir $p(t) = 0$, eru því $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ og $\lambda_3 = 2$.

Eiginvigarnir finnast með því að leysa jöfnhneppin $(A - \lambda_i)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Byrjum á $\lambda_1 = -1$. Þá þarf að leysa jöfnuhneppið $(A+I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Notum venjulega aðferð til að leysa jöfnuhneppið

$$A + I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rudda efrastallaformið segir okkur að $\mathbf{x}$ er lausn $(A+I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ef og aðeins ef $\mathbf{x}$ uppfyllir skilyrðin $x_1 + x_3 = 0$ og $x_2 = 0$. Lausnirnar eru því vigrar $\mathbf{x} = t(1, 0-1)$, og ef $t \neq 0$ þá er $\mathbf{x}$ eiginvigur.

Á sama hátt fæst að eiginvigrar fyrir $\lambda_2 = 1$ eru á forminu $\mathbf{x} = t(1, 0, -3)$ þar sem t má vera hvaða tala sem er nema 0, og eiginvigrar fyrir $\lambda_3 = 2$ eru á forminu $\mathbf{x} = t(0, 1, 0)$, $t \neq 0$.

Tökum nú grunn fyrir hvert eiginrúm. Vigurinn $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1)$ myndar grunn fyrir $E(-1)$, vigurinn $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -3)$ myndar grunn fyrir $E(1)$ og $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 0)$ myndar grunn fyrir $E(2)$. Saman mynda vigrarnir grunn fyrir $\mathbf{R}^3$. Fylkið P fæst með því að raða þessum vigrum sem dálkum í fylki og Λ er hornalínufylki sem hefur eigingildin á hornalínunni þannig að í i-ta sæti á hornalínunni kemur eigingildið fyrir i-ta dálkvigur P. Því er

$$P = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dæmi 24.2: (Úr prófi vorið 2003) Segið til um hvort fylkið

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

er hornalínugeranlegt. Rökstuðningur nauðsynlegur.

Lausn. Reynum að hornalínugera fylkið. Fylgjum Reikniaðferð 24.6. Ef fylkið er hornalínugeranlegt þá munum við finna grunn af eiginvigrum en annars munum við sjá að slíkur grunnur er ekki til.

Fyrsta skrefið er að reikna eigingildi A. Kennimargliða A er

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)^2.$$

Jafnan $p(\lambda) = 0$ hefur bara eina lausn $\lambda = 5$, sem er eina eigingildi A.

Eiginvigrar fylkisins finnast nú með að leysa jöfnuna $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Fáum aukið fylki

$$[A - 5I \mid \mathbf{0}] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Það eina sem fæst út úr jöfnuhneppinu er að $x_2 = 0$ en x_1 má vera hvað sem er. Lausnir jöfnuhneppisins eru því vigrar $(x_1, x_2) = r(1,0)$ og einu eiginvigrar fylkisins eru vigrarnir $r(1,0)$ þar sem $r \neq 0$. Því er útilokað að finna grunn fyrir $\mathbf{R}^2$ sem samanstendur af eiginvigrum A. Fylkið A er því ekki hornalínugeranlegt.

Einnig mætti orða þetta með vísun til Setningar 24.9. Algebruleg margfeldni eigingildisins $\lambda = 5$ er 2 en rúmfræðilega margfeldni (vídd eiginrúmsins) er 1. Samkvæmt Setningu 24.9 er fylkið A þá og því aðeins hornalínugeranlegt að um öll eigingildin gildi að rúmfræðileg margfeldni sé jöfn algebruleg margfeldni.

Dæmi 24.3: Segið til um hvort eftirfarandi fylki er hornalínugeranlegt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 16 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Lausn. Finnum eigingildi A. Kennimargliða fylkisins er (liðað eftir neðstu línu fylkis)

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -4 & 0 \\ -4 & 16-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (-3-\lambda) \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -4 \\ -4 & 16-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (-3-\lambda)\big((1-\lambda)(16-\lambda) - 16\big) \\ &= (-3-\lambda)(\lambda^2 - 17\lambda) \\ &= (-3-\lambda)(\lambda - 17)\lambda. \end{aligned}$$

Eigingildin eru $\lambda_1 = 17$, $\lambda_2 = -3$ og $\lambda_3 = 0$. Samkvæmt Fylgisetningu 23.4 þá er $n \times n$ fylki sem hefur n ólík rauntölu eigingildi hornalínugeranlegt. Okkar fylki er af stærðinni 3×3 og hefur þrjú ólík rauntölu eigingildi og er því hornalínugeranlegt.

Dæmi 24.4: Finnið tvö ólík hornalínufylki sem eru bæði ámóta fylkinu $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$. (Dæmi 5.2.14 úr [F].)

Lausn. Fylkið A er sagt ámóta hornalínufylki D ef til er andhverfanlegt fylki P þannig að $D = P^{-1}AP$ (sjá Skilgreiningu 19.8). Þekkjum úr Fylgisetningu 24.5 að stökin á hornalínu D eru eigingildi A og dálkar C eru eiginvigrar. Ólík hornalínufylki sem eru ámóta A fást með því að raða eigingildunum á ólíka vegu á hornalínuna.

Í þessu dæmi er

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 0 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda).$$

Eigingildi A eru því $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = -3$.

Til að finna eiginvigrana tilheyrandi $\lambda_1 = 1$ leysum við jöfnuna $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ og fáum að lausnirnar eru $\mathbf{x} = r(1, 0)$. Ef $r \neq 0$ þá er $r(1, 0)$ eiginvigur. Setjum $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$.

Eiginvigrar fyrir $\lambda_2 = -3$ eru allir vigrar $r(1, -1)$ þar sem $r \neq 0$. Setjum $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$. Set nú

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Þá eru

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad P_2^{-1}AP_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

tvö hornalínufylki sem eru bæði ámóta A.

Dæmi 24.5: **(a)** Sýnið að ef fylkin A og B eru ámóta þá er $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$. **(b)** Látum A vera hornalínugeranlegt $n \times n$ fylki. Sýnið að $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^2)$.

Lausn. **(a)** Látum P vera andhverfanlegt fylki þannig að $B = P^{-1}AP$. Þá er $A = PBP^{-1}$. Þægilegt er að nálgast verkefnið þannig að við sýnum að

$$N(B) = P^{-1}N(A) = \{\mathbf{v} \mid \text{til er } \mathbf{w} \in N(A) \text{ þannig að } \mathbf{v} = P^{-1}\mathbf{w}\}.$$

Sýnum fyrst að ef $\mathbf{v}$ er í $P^{-1}N(A)$ þá er $\mathbf{v}$ í $N(B)$. Látum $\mathbf{w}$ vera vigur í $N(A)$ þannig að $\mathbf{v} = P^{-1}\mathbf{w}$. Þá er $B\mathbf{v} = BP^{-1}\mathbf{w} = P^{-1}APP^{-1}\mathbf{w} = P^{-1}A\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Svo $\mathbf{v} \in N(B)$ og $P^{-1}N(A) \subseteq N(B)$.

Gerum nú ráð fyrir að $\mathbf{v}$ sé vigur í $N(B)$. Setjum $\mathbf{w} = P\mathbf{v}$. Þá er $A\mathbf{w} = PBP^{-1}P\mathbf{v} = PB\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Svo $\mathbf{w} \in N(A)$ og svo er $P^{-1}\mathbf{w} = P^{-1}P\mathbf{v} = \mathbf{v}$ svo $\mathbf{v} \in P^{-1}N(A)$ Því er $N(B) \subseteq P^{-1}N(A)$. Höfum nú sýnt að $N(B) = P^{-1}N(A)$.

Sýnum nú að víddin á $N(B) = P^{-1}N(A)$ er sú sama og víddin á $N(A)$. Látum $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vera grunn fyrir $N(A)$. Þar sem P^{-1} er andhverfanlegt fylki þá er fjölskyldan $\{P^{-1}\mathbf{v}_1, \ldots, P^{-1}\mathbf{v}_k\}$ óháð, samanber dæmi 3.2.11 í [SA]. Ef $\mathbf{w} \in P^{-1}N(A)$ þá er til vigur $\mathbf{v} \in N(A)$ þannig að $\mathbf{w} = P^{-1}\mathbf{v}$. Ritum $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$ og þá fæst að

$$\mathbf{w} = P^{-1}\mathbf{v} = P^{-1}(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k) = c_1P^{-1}\mathbf{v}_1 + \cdots + c_kP^{-1}\mathbf{v}.$$

Svo $\mathbf{w}$ er í spanni $P^{-1}\mathbf{v}_1, \ldots, P^{-1}\mathbf{v}_k$ og við fáum að $P^{-1}N(A) = \operatorname{Span}(P^{-1}\mathbf{v}_1, \ldots, P^{-1}\mathbf{v}_k)$.

Því er $\operatorname{null}(A) = \operatorname{null}(B)$ og $\operatorname{rank}(A) = n - \operatorname{null}(A) = n - \operatorname{null}(B) = \operatorname{rank}(B)$.

(b) Þar sem A er hornalínugeranlegt þá er er til andhverfanlegt fylki P þannig að $\Lambda = P^{-1}AP$ er hornalínufylki. Sjáum líka að $\Lambda^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P$.

Samkvæmt **(a)** lið er $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(\Lambda)$ og $\operatorname{rank}(A^2) = \operatorname{rank}(\Lambda^2)$. Stétt hornalínufylkis er jöfn fjölda ekki 0 staka á hornalínunni. Þessi fjöldi er sá sami í Λ og Λ^2 svo að $\operatorname{rank}(\Lambda) = \operatorname{rank}(\Lambda^2)$. Því er

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(\Lambda) = \operatorname{rank}(\Lambda^2) = \operatorname{rank}(A^2).$$

Athugum að það gildir ekki almennt að $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^2)$, t.d. gildir það ekki um fylkið $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Fyrirlestur 25
Hagnýtingar hornalínugeranleika.

Dæmi 25.1: (Úr prófi í desember 2001.) Setjum

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Finnið A^{25}.

Lausn. Notum aðferð sem kynnt var í Reiknitækni 25.1. Hornalínugerum A.
Fyrst er að finna eigingildin. Kennimargliðan er

$$p(t) = \det(A - tI) = \det \begin{bmatrix} 7-t & 3 \\ 3 & 7-t \end{bmatrix} = (7-t)^2 - 9 = t^2 - 14t + 40 = (t-4)(t-10).$$

Eigingildin eru því $\lambda_1 = 4$ og $\lambda_2 = 10$.

Finnum svo eiginvigrana. Fyrst fyrir $\lambda_1 = 4$. Lausnir jöfnunnar $(A - 4I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eru $\mathbf{x} = t(1, -1)$. Vigurinn $\mathbf{v}_1 = (1, -1)$ myndar grunn fyrir eiginrúmið $E(4)$. Svo er það $\lambda_2 = 10$. Lausnir jöfnunnar $(A - 10I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eru $\mathbf{x} = t(1, 1)$. Vigurinn $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$ myndar grunn fyrir eiginrúmið $E(10)$.

Stillum svo upp fylkinu

$$P = \begin{bmatrix} | & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og reiknum svo} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Þá er

$$\Lambda = P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Nú er $\Lambda = P^{-1}AP$ svo að $A = P\Lambda P^{-1}$. Eins og sýnt var í Reiknitækni 25.1 þá er $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$. Þá er

$$\begin{aligned} A^k &= P\Lambda^k P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4^k & 0 \\ 0 & 10^k \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4^k & -4^k \\ 10^k & 10^k \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 10^k + 4^k & 10^k - 4^k \\ 10^k - 4^k & 10^k + 4^k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Niðurstaðan er að

$$A^{25} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 10^{25} + 4^{25} & 10^{25} - 4^{25} \\ 10^{25} - 4^{25} & 10^{25} + 4^{25} \end{bmatrix}.$$

Dæmi 25.2: Látum $a_0 = 2$, $a_1 = 3$ og $a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1}$ fyrir $k \geq 1$. Notið línulega algebru til að finna formúlu fyrir a_k. (Dæmi 6.3.7 úr [SA].)

Lausn. Fylgjum aðferðinni úr Example 2, bls. 327 í [SA]. Setjum $\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} a_k \\ a_{k+1} \end{bmatrix}$.
Svo er

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} a_{k+1} \\ a_{k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{k+1} \\ -2a_k + 3a_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_k \\ a_{k+1} \end{bmatrix}.$$

Setjum $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. Eins og í sýnidæminu um Fibonacci tölurnar þá er $\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0$. Notum hornalínugjörning til að átta okkur á A^k. Fylgjum Reikniaðferð 24.6 við hornalínugjörninginn.

Fyrst þarf að finna eigingildi A. Kennimargliða A er

$$p(t) = \det(A - tI) = \det \begin{bmatrix} -t & 1 \\ -2 & 3-t \end{bmatrix} = (-t)(3-t) + 2 = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2).$$

Lausnir $p(t) = 0$ eru $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$.

Eiginvigrarnir finnast með því að leysa $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Í þessu dæmi vantar okkur bara einn stakan eiginvigur fyrir hvort eigingildið. Vigurinn $\mathbf{v}_1 = (1,1)$ er eiginvigur fyrir $\lambda_1 = 1$ og $\mathbf{v}_2 = (1,2)$ er eiginvigur fyrir $\lambda_1 = 2$.

Setjum nú

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{og þá er} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Síðan er

$$\Lambda = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Notum okkur nú að þar sem $\Lambda = P^{-1}AP$ þá er $A = P\Lambda P^{-1}$ og $A = P\Lambda^k P^{-1}$. Því

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_k &= A^k \mathbf{x}_0 \\
&= P\Lambda^k P^{-1} \mathbf{x}_0 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2^k \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 + 2^k \\ 1 + 2^{k+1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Svo

$$\begin{bmatrix} a_k \\ a_{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 1 + 2^k \\ 1 + 2^{k+1} \end{bmatrix},$$

og því er

$$a_k = 1 + 2^k.$$

Dæmi 25.3: (Úr prófi vorið 2003) Leysið diffurjöfnuhneppið

$$\begin{aligned}
x_1' &= 3x_1 - 4x_2 \\
x_2' &= 2x_1 - 3x_2 \\
x_3' &= \qquad\qquad x_3.
\end{aligned}$$

Athugasemd. Í bók þeirra Adams og Shifrin koma svona diffurjöfnuhneppi fyrir í kafla 7, þriðja hluta, sem er ekki hluti af námsefninu haustið 2005. Í lausn þessa dæmis er fylgt aðferð úr [F]. Diffurjöfnuhneppi koma víða upp í hagnýtingum. Fjallað er um þau í námskeiðunum Stærðfræðigreining IIIb og Diffurjöfnur.

Lausn. Stuðlafylki jöfnuhneppisins er

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fyrsta skrefið í lausninni er að hornalínugera A, þ.e.a.s. við þurfum að finna andhverfanlegt fylki P og hornalínufylki Λ þannig að $P^{-1}AP = \Lambda$. Notum Reikniaðferð 24.6.

Fyrsta skref er að finna eigingildi A. Kennimargliða A er (notum liðun eftir þriðja dálk)

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -4 & 0 \\ 2 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda) \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)\big((3-\lambda)(-3-\lambda)+8\big) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2-1) \\ &= (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1). \end{aligned}$$

Lausnir $p(\lambda) = 0$ eru eigingildi A. Eigingildin eru $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 1$.

Næst er að finna eiginvigrana. Byrjum með $\lambda_1 = -1$. Þurfum að leysa jöfnuna $(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Lausnarúm þessara jöfnu er eiginrúm A tilheyrandi $\lambda_1 = -1$. Riðjum fylki $A - (-1)I$:

$$A - (-1)I = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sjáum að lausnirnar eru $(x_1, x_2, x_3) = x_3(1,1,0)$. Eiginrúm A tilheyrandi $\lambda_1 = -1$ er því $E_{\lambda_1} = \operatorname{Span}((1,1,0))$. Grunnur fyrir lausnarúmið er $\mathbf{v}_1 = (1,1,0)$.

Svo eru það eiginvigarnir fyrir eigingildið $\lambda_2 = 1$. Leysum jöfnuna $(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Fáum aukið fylki

$$A - I = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hér eru x_2 og x_3 frjálsar breytur (eini vendistuðullinn er í fyrsta dálki). Lausnir jöfnuhneppisins eru

$$(x_1, x_2, x_3) = (2x_2, x_2, x_3) = x_2(2,1,0) + x_3(0,0,1).$$

Vigrarnir $\mathbf{v}_2 = (2,1,0)$ og $\mathbf{v}_3 = (0,0,1)$ mynda grunn fyrir lausnarúmið sem er jafnt eiginrúmi A tilheyrandi $\lambda_2 = 1$.

Vigrarnir $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ eru eiginvigrar A og mynda grunn fyrir $\mathbf{R}^3$. Því er fylkið A hornalínugeranlegt. Fylkið P finnst með því að láta eiginvigrana $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vera dálka P og hornalínufylkið Λ finnst með því að raða tilheyrandi eigingildum A á hornalínuna. Svo að

$$P = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Látum $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$. Setjum $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ inn í jöfuna $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Notum okkur að $\mathbf{x}' = P\mathbf{y}$ og því er $P\mathbf{y}' = AP\mathbf{y}$. Margföldum báðar hliðar með P^{-1} frá vinstri og fáum þá að $\mathbf{y}' = P^{-1}AP\mathbf{y}$. Þar sem $\Lambda = P^{-1}AP$ þá gildir um $\mathbf{y}$ diffurjafnan $\mathbf{y}' = \Lambda\mathbf{y}$. Þannig að

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Fáum nú diffurjöfnur

$$y_1' = -y_1 \qquad y_2' = y_2 \qquad y_3' = y_3.$$

Diffurjöfnu á forminum $y' = ay$ er auðvellt að leysa, lausnin er $y = ke^{at}$ þar sem k er fasti. Því er

$$y_1 = k_1e^{-t} \qquad y_2 = k_2e^{t} \qquad y_3 = k_3e^{t}.$$

Þar sem $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$ þá er $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ og

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1e^{-t} \\ k_2e^{t} \\ k_3e^{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1e^{-t} + 2k_2e^{t} \\ k_1e^{-t} + k_2e^{t} \\ k_3e^{t} \end{bmatrix}.$$

Fyrirlestur 26
Rófsetningin.

Dæmi 26.1: Látum A vera þverstaðlað 3×3 fylki.

a. Sýnið að kennimargliða A hefur rauntölurót.

b. Sýnið að $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ fyrir alla vigra $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ og ályktið að einu mögulegu rauntölu eigingildi A eru 1 og -1.

c. Sannið að ef $\det A = 1$ þá er 1 eigingildi A.

d. Sannið að ef $\det A = 1$ þá er $\mu_A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vörpun sem fæst með að snúa um eitthvert horn θ um einhvern ás.

e. Sannið að samskeyting snúninga í $\mathbf{R}^3$ er snúningur.

(Dæmi 6.2.14 úr [SA].)

Lausn. **a.** Kennimargliða A er 3. stigsmargliða. Vitum einnig að kennimargliðan er á forminu $p(t) = -t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$. Sjáum að þegar $t \to -\infty$ þá $p(t) \to \infty$ og þegar $t \to \infty$ þá $p(t) \to -\infty$. Samkvæmt Milligildissetningunni úr Stærðfræðigreiningu þá hlýtur graf $p(t)$ að skera t-ásinn og því hefur jafnan $p(t) = 0$ að minnsta kosti eina rauntölulausn.

b. Vitum að $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$ og að $A^TA = I$. Því er

$$\|A\mathbf{x}\|^2 = (A\mathbf{x}) \cdot (A\mathbf{x}) = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TA^TA\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2.$$

Þar sem $\|A\mathbf{x}\| \geq 0$ og $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ má álykta af jöfnunni $\|A\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$ að $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$. (Þetta var líka sýnt í Setningu 26.3 í fyrirlestri.)

Gerum ráð fyrir að λ sé eigingildi A og $\mathbf{x}$ sé tilheyrandi eiginvigur, þ.e.a.s. $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Þá er

$$\|\mathbf{x}\| = \|A\mathbf{x}\| = \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|.$$

Því er $|\lambda| = 1$ og þar með ályktum við að $\lambda = -1$ eða $\lambda = 1$.

c. Þar sem $\det(A) = 1$ þá er $p(0) = \det(A - 0I) = \det(A) = 1$. En eins og sagði hér fyrir ofan þá $p(t) \to -\infty$ þegar $t \to \infty$. Þegar t stækkar þá fer graf $p(t)$ niður fyrir t-ásinn og því hlýtur að vera til jákvæð tala λ þannig að $p(\lambda) = 0$. En einu mögulegu rætur p (eigingildi A) eru -1 og 1. Því er $\lambda = 1$ rót kennimargliðunnar og 1 er eigingildi A.

d. Rifjum upp að samkvæmt Setningu 26.3 þá er varðveitir A depilmargfeldi, þ.e.a.s. fyrir alla vigra $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^3$ gildir að $(A\mathbf{x}) \cdot (A\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. Sérstaklega gildir að ef $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ eru hornréttir hvor á annan þá eru $A\mathbf{x}$ og $A\mathbf{y}$ líka hornréttir.

Skilgreinum hlutrúmið $V = E(1)^\perp$. Sýnum að $\mu_A(V) = \{A\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in V\}$ er jafnt V. Skoðum vigur $\mathbf{v} \in V$. Ef $\mathbf{x}$ er einhver vigur í $E(1)$ þá er $\mathbf{v}$ hornréttur á $\mathbf{x}$. Því er $A\mathbf{v}$ hornréttur á $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Af þessu ályktum við að $A\mathbf{v} \in V$. Svo $\mu_A(V) \subseteq V$. Vörpunin μ_A er andhverfanleg þannig að víddin á $\mu_A(V)$ er jöfn víddin á V. Þar sem $\mu_A(V) \subseteq V$ og hlutrúmin $\mu_A(V)$ og V hafa sömu vídd getum við ályktað að $\mu_A(V) = V$.

Sýnum að $A = I$ eða eiginrúmið $E(1)$ hefur víddina 1. Ef $E(1)$ hefur víddina 3 þá er $E(1) = \mathbf{R}^3$ og því gildir um sérhvern vigur $\mathbf{x}$ í $\mathbf{R}^3$ að $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Þá fæst að $A = I$ og ekkert meira um það tilvik að segja. Ef víddin á $E(1)$ er 2 þá hefur V víddina 1. Segjum að $\mathbf{v}$ spanni V. Samkvæmt ofansögðu er $A\mathbf{v} \in V$ og þar sem $V = \mathrm{Span}(\mathbf{v})$ þá er $A\mathbf{v}$ samsíða $\mathbf{v}$, þ.e.a.s. $\mathbf{v}$ er eiginvigur A. Eigingildið tilheyrandi $\mathbf{v}$ getur ekki verið 1 svo það hlýtur að vera -1. Staða mála er þá að 1 er tvöfalt eigingildi og -1 er einfalt eigingildi. Ákveða A er margfeldi eigingildanna (talið með margfeldni) svo $\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1$, sem er mótsögn. Ályktum því að $E(1)$ hafi víddina 1 og V hafi víddina 2.

Veljum þverstaðlaðan grunn $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ þannig að $\mathbf{v}_3$ spannar $E(1)$ og $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$. Grunnurinn $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ „virkar" eins og venjulegi grunnurinn $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Þá spanna $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ hlutrúmið $V = E(1)^{\perp}$. Vigrarnir $\mu_A(\mathbf{v}_1)$ og $\mu_A(\mathbf{v}_2)$ eru báðir einingarvigrar og hornréttir hvor á annan og báðir eru í V. Því má rita $\mu_A(\mathbf{v}_1) = \cos(\theta)\mathbf{v}_1 + \sin(\theta)\mathbf{v}_2$ og þar sem $\mu_A(\mathbf{v}_2)$ er hornréttur á $\mu_A(\mathbf{v}_1)$ þá er $\mu_A(\mathbf{v}_2) = -\sin(\theta)\mathbf{v}_1 + \cos(\theta)\mathbf{v}_2$ eða $\mu_A(\mathbf{v}_2) = \sin(\theta)\mathbf{v}_1 - \cos(\theta)\mathbf{v}_2$. Sjáum nú að fylki μ_A með tilliti til grunnsins $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er

$$B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{eða} \qquad B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fylkið B á að vera ámóta A svo að þau hafa sömu ákveðu. Seinni möguleikinn hér að ofan fyrir B hefur ákveðu -1. Því er fylki μ_A með tilliti til grunnsins $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$

$$B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

og μ_A er snúningur um ásinn með stefnuvigur $\mathbf{v}_3$ um hornið θ.

e. Látum $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vera snúning um einhvern ás um hornið θ. Sýnum fyrst að venjulega fylkið fyrir T er þverstaðlað. Veljum þverstaðlaðan grunn $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ þannig að $\mathbf{v}_3$ er í stefnu snúningsáss og $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$. Fylki T miðað við þennan grunn er

$$B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Auðvelt er að ganga úr skugga um að þetta fylki er þverstaðlað. Venjulega fylkið fyrir T er $A = PBP^{-1}$ þar sem P er fylkið sem hefur $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sem dálka. Athugum að þar sem dálkar P mynda þverstaðlaðan grunn fyrir $\mathbf{R}^3$ þá er P þverstaðlað fylki og $P^{-1} = P^T$. Vitum að $B^TB = I$. Þá er

$$A^TA = (P^{-1}BP)^TP^{-1}BP = (P^TBP)^TP^TBP = P^TB^TPP^TBP = I.$$

Því er fylkið A líka þverstaðlað.

Látum nú S vera snúning um einhvern ás um hornið ϕ. Segjum að C sé venjulega fylkið fyrir S. Venjulega fylkið fyrir $T \circ S$ er AC. Auðvelt er að ganga úr skugga um að AC er þverstaðlað (margfeldi tveggja þverstaðlaðra fylkja er þverstaðlað) og $\det(AC) = 1$. Því er AC fylki fyrir snúning um einhvern ás og samskeytingin $T \circ S$ er snúningur.

Dæmi 26.2: Finnið þverstaðlað fylki Q sem hornalínugerir fylkið

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Dæmi 6.4.1f úr [SA].)

Lausn. **Skref 1.** Finna eigingildi A.

Reiknum kennimargliðu A. Hún er

$$\begin{aligned}
p(t) &= \det(A - tI) \\
&= \det \begin{bmatrix} 1-t & -2 & 2 \\ -2 & 1-t & 2 \\ 2 & 2 & 1-t \end{bmatrix} \\
&= (1-t)\det \begin{bmatrix} 1-t & 2 \\ 2 & 1-t \end{bmatrix} - (-2)\det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1-t \end{bmatrix} + 2\det \begin{bmatrix} -2 & 1-t \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \\
&= (1-t)(t^2 - 2t - 3) + 2(2t-6) + 2(2t-6) \\
&= (1-t)(t-3)(t+1) + 8(t-3) \\
&= (t-3)\big((1-t)(1+t) + 8\big) \\
&= (t-3)(-t^2 + 9) \\
&= -(t+3)(t-3)^2.
\end{aligned}$$

Eigingildin, lausnir $p(t) = 0$, eru $\lambda_1 = -3$ og $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

Skref 2. Finna eiginrúmin.

Eiginvigrarnir finnast með að leysa jöfnhneppin $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Fyrir $\lambda_1 = -3$ þarf að finna núllrúm fylkisins

$$A - (-3)I = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eiginvigrarnir uppfylla því jöfnurnar $x_1 + x_3 = 0$ og $x_2 + x_3 = 0$. Því eru eiginvigrarnir á forminu $\mathbf{x} = x_3(-1, -1, 1)$ með $x_3 \neq 0$. Vigurinn $\mathbf{v}_1 = (-1, -1, 1)$ er grunnur fyrir eiginrúmið $E(-3)$.

Skoðum nú $\lambda_2 = 3$. Þá þarf að leysa $(A - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, þ.e.a.s. finna núllrúm

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eiginvigrarnir eru því allir vigrar á forminu $\mathbf{x} = x_2(-1, 1, 0) + x_3(1, 0, 1)$, þar sem x_2 og x_3 eru ekki bæði 0. Vigrarnir $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 0)$ og $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)$ mynda grunn fyrir eiginrúmið $E(3)$.

Skref 3. Vigrarnir $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ mynda grunn fyrir R^3 Þar sem við viljum finna þverstaðlað fylki sem hornalínugerir A þá finnum við þverstaðlaða grunn. Nóg er að fást við hvert eiginrúm fyrir sig því eiginvigrar samhverfs fylki sem tilheyra ólíkum eigingildum eru sjálfkrafa hornréttir hvor á aðra.

Vigurinn $\mathbf{v}_1 = (-1, -1, 1)$ er grunnurinn fyrir $E(-3)$. Við viljum þverstaðlaðan grunn svo við þurfum einingarvigur sem spannar $E(-3)$. Setjum því $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)$.

Vigararnir $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 0)$ og $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)$ mynda grunn fyrir $E(3)$. Beitum aðferð Gram-Schmidt til að finna þverstaðlaðan grunn. Setjum fyrst $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2$ og svo

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \tfrac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2}\mathbf{w}_2 = (1, 0, 1) - \tfrac{-1}{2}(-1, 1, 0) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1).$$

Við viljum einingarvigra svo við setjum

$$\mathbf{q}_2 = \tfrac{1}{\|\mathbf{w}_2\|}\mathbf{w}_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0) \quad \text{og} \quad \mathbf{q}_3 = \tfrac{1}{\|\mathbf{w}_3\|}\mathbf{w}_3 = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2).$$

Vigrarnir $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ mynda þverstaðlaðan grunn fyrir $\mathbf{R}^3$.

Skref 4. Stillum upp fylkinu Q:

$$Q = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Síðan fylgir að $Q^{-1}AQ$ er hornalínufylki og

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dæmi 26.3: Látum $\Lambda = Q^{-1}AQ$ vera hornalínufylki. Sýnið að ef Q er þverstaðlað þá er A samhverft.

Lausn. Þar sem $\Lambda = Q^{-1}AQ$ þá er $A = Q\Lambda Q^{-1}$. Með því að nota okkur reglur um „byltingar“ fylkja og þá sérstaklega að hornalínufylkið Λ er samhverft og að um þverstaðalaða fylkið Q gildir að $Q^T = Q^{-1}$ fæst að

$$A^T = (Q\Lambda Q^{-1})^T = (Q\Lambda Q^T)^T = (Q^T)^T\Lambda^T Q^T = Q\Lambda Q^{-1} = A.$$

Svo A er samhverft eins og átti að sýna.

Fyrirlestur 27
Rófsetning og ferningsform.

Dæmi 27.1: Finnið hornrétt breytuskipti sem breyta ferningsforminu $3x^2-4xy+3y^2$ í hornalínuform. (Dæmi 8.1.13 úr [F].)

Lausn. Notum Reikniaðferð 27.4.

Skref 1: Finna samhverft fylki fyrir ferningsformið. Stuðlarnir við önnur veldin koma á hornalínuna og stuðullinn við blandaða liðinn skiptast jafnt sitthvoru megin við hornalínuna. Fáum

$$A = \begin{bmatrix} (\text{stuðull við } x^2) & \frac{1}{2}(\text{stuðull við } xy) \\ \frac{1}{2}(\text{stuðull við } xy) & (\text{stuðull við } y^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Skref 2: Reikna eigingildi A. Fyrst er að finna kennimargliðu A:

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (3-\lambda)^2 - 4 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 9 - 4 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 5 \\ &= (\lambda-1)(\lambda-5). \end{aligned}$$

Eigingildin eru því $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 5$.

Hornalínugerð þessa ferningsforms er

$$\lambda_1 t_1^2 + \lambda_2 t_2^2 = t_1^2 + 5t_2^2.$$

Skref 3: Finna eiginvigra fyrir A sem eru jafnframt einingarvigrar. Fáum vigrana

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Skref 4: Breytuskiptafylkið P finnst með því að raða vigrunum á dálkana. Fáum fylkið

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tökum eftir að ákveða C er -1. Ef við viljum frekar fylki með ákveðu 1 (snúningsfylki) þá getum við breytt öllum formerkjum í einum dálki P og þá breytir ákveðan um formerki. Fengjum þá fylkið

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Skref 5: Þegar við notum breytuskiptin $\mathbf{x} = P\mathbf{t}$, það er að segja setjum inn

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t_1+t_2) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t_1-t_2), \end{aligned}$$

fáum við að

$$3x^2 - 4xy + 3y^2 = t_1^2 + 5t_2^2.$$

Dæmi 27.2: (Úr prófi í apríl 2003.) Finnið hornalínugerð (e. diagonal form) ferningsformsins $-6xy+8y^2$ og segið til hvort ferilinn sem hefur jöfnuna $-6xy+8y^2 = 9$ er sporbaugur (e. ellipse), breiðbogi (e. hyperbola) eða fleygbogi (e. parabola).

Viðbót: Rissið upp mynd af ferlinum.

Lausn. Stillum upp samhverfu fylki fyrir ferningsformið. Það er

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Kennimargliða A er

$$p(t) = \det(A-tI) = \det \begin{bmatrix} -t & -3 \\ -3 & 8-t \end{bmatrix} = (-t)(8-t) - 9 = t^2 - 8t - 9 = (t+1)(t-9).$$

Eigingildin eru $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 9$. Hornalínuform ferningsformsins er $-t_1^2 + 9t_2^2$. Eigingildin hafa ólík formerki svo samkvæmt Setningu 27.7 er ferillinn breiðbogi.

Síðan er það viðbótin. Ferillinn $-6xy + 8y^2 = 9$ hefur jöfnu $-t_1^2 + 9t_2^2 = 9$ í breytunum t_1 og t_2. Vigurinn $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 1)$ er eiginvigur fyrir $\lambda_1 = -1$ og vigurinn $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, 3)$ er eiginvigur fyrir $\lambda_2 = 9$. Í breytuskiptunum sem notuð eru til að koma ferningsforminu yfir á hornalínuform þá tákna t_1 og t_2 hnit miðað við grunnin $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$. Teiknum venjulegt hnitakerfi. Merkjum svo inn t_1-ás í stefnu $\mathbf{q}_1$ og t_2-ás í stefnu $\mathbf{q}_2$. Snúum blaðinu aðeins svo að t_1- og t_2 ásarnir horfi við okkur líkt of x- og y-ásarnir gera venjulega. Merkjum inn línurnar $t_2 = \frac{1}{3}t_1$ og $t_2 = -\frac{1}{3}t_1$. Breiðboginn fer í gegnum punktana $(t_1, t_2) = (0, 3)$ og $(t_1, t_2) = (0, -3)$, og línurnar okkar eru aðfellur.

Dæmi 27.3: Sagt er að ferningsform $q(x_1, \dots, x_n)$ sé jákvætt ákveðið (e. positive definite) ef $q(x_1, \dots, x_n) > 0$ fyrir allar tölur $x_1, \dots, x_n$ þannig að $x_1, \dots, x_n$ eru ekki allar núll. Sýnið að ferningsform q er jákvætt ákveðið ef og aðeins ef öll eigingildi samhverfa fylkisins eru stærri en 0.

Lausn. Látum $q(x_1, \dots, x_n)$ vera gefið ferningsform. Látum A tákna samhverfa fylkið fyrir q og $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ eigingildi A (talin með margfeldni). Við getum nú fundið breytuskiptafylki P þannig að ef $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ eru nýjar breytur og við setjum $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) = P\mathbf{t}$ þá fæst að

$$q(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 t_1^2 + \cdots + \lambda_n t_n^2.$$

Sjáum beint að ef að öll eigingildin eru jákvæð þá er $q(x_1, \dots, x_n) > 0$ ef gildin á $x_1, \dots, x_n$ eru ekki 0. Skilyrðið um að öll eigingildin séu jákvæð dugar því til að álykta að q sé jákvætt ákveðið ferningsform.

Gerum nú ráð fyrir að $\lambda_i \leq 0$. Látum $t_i = 1$ en öll hin t-in setjum við jöfn 0. Setjum svo $\mathbf{x} = P\mathbf{t}$. Þá verður $q(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \leq 0$ og ferningsformið er því ekki jákvætt ákveðið. Af þessu sést að ef q er jákvætt ákveðið ferningsform þá verða öll eigingildi samhverfa fylkisins A að vera stærri en 0.

Fyrirlestur 28
Fylki og vigrar með tvinntölum.

Dæmi 28.1: (Úr prófi í vorið 2003.) Leysið jöfnuhneppið

$$\begin{aligned} z_1 + iz_2 \qquad & + z_3 - z_4 = 0 \\ z_1 \qquad & + (1+i)z_3 + z_4 = 0, \end{aligned}$$

þar sem z_1, z_2, z_3, z_4 eru tvinntölur.

Lausn. Stillum upp fylki og beitum Gauss eyðingu (þurfum ekki að hafa dálkinn til hægri með því þar eru og verða bara 0):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & i & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1+i & 1 \end{bmatrix} &\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1+i & 1 \\ 1 & i & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \\ L_1 \end{matrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1+i & 1 \\ 0 & i & -i & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \\ L_2 - L_1 \end{matrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1+i & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2i \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \\ -iL_2 \end{matrix} \end{aligned}$$

Þegar við snúum þessu aftur til baka í jöfnuhneppi fáum við

$$\begin{aligned} z_1 \quad + (1+i)z_3 \quad + z_4 &= 0 \\ z_2 \qquad - z_3 + 2iz_4 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= -(1+i)z_3 - z_4 = -(1+i)z_3 - z_4 \\ z_2 &= z_3 - 2iz_4 = r - 2iz_4. \end{aligned}$$

Lausn jöfnuhneppisins er því

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1+i)z_3 - z_4 \\ z_3 - 2iz_4 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = z_3 \begin{bmatrix} -(1+i) \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -2i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Athugið að z_3 og z_4 mega taka hvaða tvinntölugildi sem við viljum.

Dæmi 28.2: (Úr prófi í desember 2002.) Finnið grunn fyrir dálkrúm fylkisins

$$\begin{bmatrix} 1 & i & -i \\ 3 & 4+i & -2+3i \\ 3 & 2+2i & -1 \end{bmatrix}.$$

Lausn. Fjallað var um aðferðina til að finna grunn fyrir dálkrúm fylkis á Fyrirlestrarblaði 12, Reikniaðferð 12.4. Byrjum á að nota línuaðgerðir til að koma fylkinu yfir á efra stallaform:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & i & -i \\ 3 & 4+i & -2+3i \\ 3 & 2+2i & -1 \end{bmatrix} &\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & i & -i \\ 0 & 4-2i & -2+6i \\ 0 & 2-i & -1+3i \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \\ L_2 - 3L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{matrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & i & -i \\ 0 & 4-2i & -2+6i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \\ \\ L_3 - \frac{1}{2}L_2 \end{matrix} \quad . \end{aligned}$$

Á efra stallaforminu eru pinnar í fyrsta og öðrum dálk. Samkvæmt Reikniaðferð 12.4 þá tökum við nú dálkvigra 1 og 2 úr **upphaflega** fylkinu og þeir eru grunnurinn. Vigrarnir $(1,3,3)$ og $(i, 4+i, 2+i)$ mynda grunn fyrir dálkrúmið.

28.3: Notið aðferð Gram-Schmidt til að breyta grunninum $(2+i, 1+i), (1+i, i)$ fyrir $\mathbf{C}^2$ í þverstæðan grunn. (Dæmi 9.2.27 úr [F].)

Lausn. Förum eftir Reikniaðferð 15.8. Setjum

$$\mathbf{a}_1 = (2+i, 1+i) \qquad \text{og} \qquad \mathbf{a}_2 = (1+i, i).$$

Setjum $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 = (2+i, 1+i)$. Notum svo Gram-Schmidt aðferðina til að fá $\mathbf{v}_2$ sem er hornréttur á $\mathbf{v}_1$. Athugum að þar sem við erum að vinna með tvinntalnavigra þá skiptir mál hvor vigurinn er fyrir framan þegar innfeldi reiknað. Fyrir tvinntölur er rétta formúlan

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_2 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} \mathbf{v}_1.$$

Fáum að

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{a}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_2 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} \mathbf{v}_1 \\
&= (1+i, i) - \frac{\langle (2+i, 1+i), (1+i, i) \rangle}{\langle (2+i, 1+i), (2+i, 1+i) \rangle} (2+i, 1+i) \\
&= (1+i, i) - \frac{\overline{(2+i)}(1+i) + \overline{(1+i)} i}{\overline{(2+i)}(2+i) + \overline{(1+i)}(1+i)} (2+i, 1+i) \\
&= (1+i, i) - \frac{(2-i)(1+i) + (1-i) i}{(2-i)(2+i) + (1-i)(1+i)} (2+i, 1+i) \\
&= (1+i, i) - \frac{4+2i}{7} (2+i, 1+i) \\
&= (1+i, i) - \frac{1}{7} (6+8i, 2+6i) \\
&= \frac{1}{7} (1-i, -2+i).
\end{aligned}$$

Svarið sem við fáum er því

$$\mathbf{v}_1 = (2+i, 1+i) \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{7}(1-i, -2+i).$$

Laga mætti þetta til því við erum aðeins beðin um þverstæðan grunn svo margfalda má $\mathbf{v}_2$ með 7 og fá grunninn

$$(2+i, 1+i) \qquad \text{og} \qquad (1-i, -2+i).$$

Dæmi 28.4: (Úr prófi í desember 2002.) Gerið grein fyrir að fylkið

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & i & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

sé einoka og finnið andhverfu þess.

Lausn. Skírum fylkið í dæminu A. Fylkið A er einoka ef $A^*A = I$. Aðoka fylkið A^* finnst með því að samoka fyrst allar tölurnar og bylta svo því fylki. Þá er

$$A^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & -i & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Reiknum nú A^*A og fáum að

$$A^*A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & -i & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & i & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Þar sem $A^*A = I$ þá er fylkið A einoka og andhverfan er auðvitað fylkið A^* sem sýnt er hér að ofan.