

LÍNULEG ALGEBRA OG RÚMFRÆÐI KYNNING Á MAPLE

Maple

Maple er táknreikniforrit.

Framkvæmir algebru útreikninga, diffrar, heildar, leysir jöfnur á nákvæman algebrískan hátt.

Líka hægt að nota tölulegar aðferðir til að fá nálgunarlausnir.

Hægt að forrita í Maple.

Notkun

Aðgengilegt í tölvuverum í Odda, Tæknigarði, VRII og Öskju.

Leiðarvísir um notkun forritsins og útlistun á þeim stærðfræðiatríðum sem koma við sögu á

www.raunvis.hi.is/reiknisetur

Umfangsmikil „hjálp“ innbyggð í kerfið.

Hvað er hægt að gera?

Diffrá föll, heilda, reikna markgildi og leysa jöfnur.

Leysa línuleg jöfnuhneppi, reikna andhverfu, finna eigingildi og eiginviga, finna grunna, finna ofanvarp og svo framvegis.

Byrja á að láta vélina hlaða inn pakka með línulegri algebru
`with(LinearAlgebra);`

Helstu skipanir í LinearAlgebra pakka.

Basis, CharacteristicPolynomial, ColumnSpace,
CrossProduct, Determinant, DotProduct,
Eigenvalues, Eigenvectors, GaussianElimination,
GenerateEquations, GenerateMatrix, GramSchmidt,
LeastSquares, LinearSolve, LUdecomposition,
MatrixInverse, Multiply, Norm, NullSpace,
Rank, ReducedRowEchelonForm, RowOperation,
RowSpace, Transpose, VectorAngle.

Dæmi 4.4 (úr sýnidæmahefti): (Úr prófi vorið 2003) Finnið stuðla a , b og c þannig að fleygboginn $y = ax^2 + bx + c$ fari í gegnum punktana $(-2, 2)$, $(1, 8)$ og $(2, 22)$.

Lausn. Setjum inn hnitin til að fá þrjár línulegar jöfnur:

$$\begin{aligned}4a - 2b + c &= 2 \\ a + b + c &= 8 \\ 4a + 2b + c &= 22.\end{aligned}$$

```
solve({4*a-2*b+c=2,a+b+c=8,4*a+2*b+c=22},{a,b,c});
```

Önnur leið:

```
A:=Matrix([[4,-2,1],[1,1,1],[4,2,1]]);
```

```
b:=Vector([2,8,22]);
```

```
LinearSolve(A,b);
```

Líka hægt að sjá útkomuna úr Gauss-eyðingu.

```
GaussianElimination(A);
```

Rutt efra stallaform fæst með

```
ReducedRowEchelonForm(A);
```

Þar sem fylkið er lítið mætti líka reikna andhverfu fylkisins og nota hana

```
MatrixInverse(A).b;
```

Dæmi 5.3: Leysið línulega jöfnuhneppið og setjið lausnina fram á formi sem tónar við Setningu 5.10.

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 &= 6 \\ x_1 - 7x_2 - 6x_3 + 2x_4 &= 6.\end{aligned}$$

Lausn.

```
A:=Matrix([[1,-2,1,1],[2,1,-3,-1],[1,-7,-6,2]]);
```

```
b:=Vector([4,6,6]);
```

```
LinearSolve(A,b);
```

Dæmi 13.1: Setjum

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Finnið grunna fyrir hlutrúmin $R(A)$, $C(A)$, $N(A)$ og $N(A^T)$. Hverjar eru víddir hlutrúmana og hvaða hlutrúm eru hornrétt hvort á annað. (Dæmi 3.4.1b úr [SA].)

Lausn.

```
A:=Matrix([[2,1,3],[4,3,5],[3,3,3]]);
```

```
Rank(A);
```

```
A1:=Vector([2,1,3]); A2:=Vector([4,3,5]); A3:=Vector([3,3,3]);
```

```
Basis([A1,A2,A3]);
```

Líka hægt að nota

```
GaussianElimination(A);
```

Eða bara beint
`ColumnSpace(A);`
`RowSpace(A);`
 Svo eru það núllrúmin:
`nullspace(A);`
`nullspace(transpose(A));`

Dæmi 16.1: Látum

$$V = \text{Span}((1, 3, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (-1, 5, 2, 2)) \subseteq \mathbf{R}^4.$$

- (a) Finnið þverstæðan grunn fyrir V .
 (b) Notið svarið úr **a** til að finna ofanvarp $\mathbf{b} = (4, -1, 5, 1)$ á V .
 (Dæmi 4.2.4 úr [SA].)

Lausn. (a) Nota Gram-Schmidt

```
v1:=Vector([1,3,1,1]); v2:=Vector([1,1,1,1]);
v3:=Vector([-1,5,2,2]);
GramSchmidt([v1,v2,v3]);
```

(b) Notum útkomuna úr (a):

```
w1:=Vector([1,3,1,1]); w2:=Vector([1,-1,1,1]); w3:=Vector([-2,0,1,1]);
b:=Vector([4,-1,5,1]);
((b.w1)/(w1.w1)).w1+((b.w2)/(w2.w2)).w2
+((b.w3)/(w3.w3)).w3;
```

Dæmi 22.2: Skilgreinum $n \times n$ fylki

$$A = \begin{bmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ a & a & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{bmatrix}.$$

Sannið að $\det(A) = b^{n-1}(na + b)$.

Lausn. Ekki hægt að leysa þetta með Maple en hægt að prófa formúlu. Prófum til dæmis 4×4 tilvikið.

```
A:=Matrix([[a+b,a,a,a],[a,a+b,a,a],
[a,a,a+b,a],[a,a,a,a+b]]);
Determinant(A);
```

Vélin fer líka létt með að gefa okkur andhverfu A

```
MatrixInverse(A);
```

5×5 tilfellið er heldur ekkert mál

```
A:=Matrix([[a+b,a,a,a,a],[a,a+b,a,a,a],
[a,a,a+b,a,a],[a,a,a,a+b,a],[a,a,a,a,a+b]]);
Determinant(A);
```

Dæmi 23.1: Finnið eiginild og eiginvigna fylkisins $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. (Dæmi 6.1.11

úr [SA].)

Lausn. Byrjum á að skilgreina fylkið

```
A:=Matrix([[3,1,0],[0,1,2],[0,1,2]]);
```

```
Eigenvalues(A);
```

```
Eigenvectors(A);
```

```
CharacteristicPolynomial(A,t);
```

```
simplify(CharacteristicPolynomial(A,t));
```

```
expand(CharacteristicPolynomial(A,t));
```

Dæmi 55 (af blaði 12): Látum $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ vera línulega vörpun þannig að fylki hennar er

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Finnið fylki þessarar vörpunar með tilliti til raðgrunnisins

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}.$$

Lausn.

```
A:=Matrix([[1,-3,3],[0,-5,6],[0,-3,4]]);
```

```
P:=Matrix([[1,0,1],[0,1,2],[0,1,1]]);
```

```
MatrixInverse(P).A.P;
```

5.2.9 (b): Sýnið að

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

Lausn.

```
Matrix([[1,1,1,1],[a,b,c,d],[a^2,b^2,c^2,d^2],
```

```
[a^3,b^3,c^3,d^3]]);
```

```
Determinant(A);
```

```
factor(Determinant(A));
```