Línuleg algebra og rúmfræði

Lausn á Dæmi 40 af blaði 9.

Dæmi 40: Skoðum $\mathcal{F}$ vigurrúm allra falla sem skilgreind eru á öllum rauntalnaásnum. Sýnið að föllin $f_1(t) = e^t$ og $f_2(t) = e^{2t}$ séu línulega óháð. Niðurstöðuna er hægt að útvíkka og sýna að ef k er náttúrleg tala þá eru föllin $f_1(t) = e^t, f_2(t) = e^{2t}, \ldots, f_k(t) = e^{kt}$ í $\mathcal{F}$ línulega óháð.

Lausn. Sýnum beint almennari niðurstöðuna.

Gerum ráð fyrir að

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_k f_k = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Í vinstri hlið er línuleg samantekt fallanna en í hægri hlið er núllfallið (fastafallið sem tekur gildið 0 fyrir öll t). Við viljum sýna að allari stuðlarnir $c_1, c_2, \ldots, c_k$ séu 0.

Af jöfnu (1) ályktum við að fyrir allar rauntölur t gildi

$$c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \cdots + c_k e^{kt} = 0. \tag{2}$$

Fyrir hverja rauntölu t fáum við því eina línulega jöfnu með óþekktum stærðum $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Vandi okkar er ná tökum á öllum þeim upplýsingum sem fellast í (1). Það má beita ýmsum brögðum til að fá fram niðurstöðuna. Hér á eftir nýtum við okkur stærðfræðigreiningu, en í kafla 6 verður fengist algebrulega við verkefni eins og það hér að ofan.

Diffrum n sinnum báðar hliðar í (2), þá fæst að fyrir allar rauntölur t er

$$c_1 e^t + 2^n c_2 e^{2t} + \cdots + k^n c_k e^{kt} = 0. \tag{3}$$

Þegar við setjum $t = 0$ þá fæst að eftirfarandi jafna gildir fyrir allar jákvæðar heilar tölur n

$$c_1 + 2^n c_2 + \cdots + k^n c_k = 0. \tag{4}$$

Hugsum okkur nú að tölurnar $c_1, c_2, \ldots, c_k$ séu ekki allar 0. Látum j vera hæsta númerið þannig að $c_j \neq 0$ (alltsvo $c_{j+1} = 0, \ldots, c_k = 0$). Þá er

$$c_j = -\tfrac{1}{j^n}(c_1 + 2^n c_2 + \cdots + (j-1)^n c_{j-1}). \tag{5}$$

Jafna (5) gildir fyrir allar jákvæðar tölur n. Sjáum að þegar n stækkar og stefnir á óendanlegt þá stefnir hægri hliðin á 0. Þetta getur ekki gengið og við ályktum að forsendan um að einhver talnanna $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sé ekki 0 sé ótæk.

Rögnvaldur G. Möller