Línuleg algebra og rúmfræði

9. LU þáttun. Bylt fylki.

9.1 Skilgreining. Látum A vera $m \times n$ fylki. Svokölluð LU þáttun (e. LU decomposition) A felst í að rita A sem margfeldi $A = LU$, þar sem L er $m \times m$ neðra þríhyrningsfylki með 1 alls staðar á hornalínunni, og U er $m \times n$ fylki á efra stallaformi.

9.2 Reikniaðferð Gefið er $m \times n$ fylki A. Verkefnið er að finna LU þáttun A.

Skref 1. Notið línuaðgerðir til að koma A yfir á efra stallaform U. Bannað er að víxla á línum og margfalda línu með fasta. Skrifið niður eftir hverja aðgerð samsvarandi $m \times m$ frumfylki E_i, þannig að E_1 sé $m \times m$ frumfylki fyrir fyrstu línuaðgerðina og svo framvegis.

Skref 2. Setjum $E = E_k \cdots E_2 E_1$. Þá er $U = EA$. Setjum síðan $L = E^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$. Hagkvæmast er að reikna andhverfu hvers frumfylkis E_i fyrir sig og reikna síðan margfeldið $E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$.

9.3 Athugasemd. (i) Alltaf er hægt að koma fylki yfir á efra stallaform án þess að nota aðgerðina að margfalda línu með fasta. Á hinn bóginn gæti verið nauðsynlegt að breyta röð lína til að fá efra stallaform. Þetta kemur ekki að mikilli sök þegar fengist við lausnir á jöfnuhneppum því þá má hugsa sér að jöfnurnar séu gefnar í „réttri“ röð í byrjun.

(ii) Í bókinni er viðhöfð sú venja að þegar neðra þríhyrningsfylkið L er prentað þá er sleppt að setja inn öll 0-in sem eru ofan við hornalínu.

9.4 Reikniðaðferð. Leysa á jöfnuhneppið $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Fundin hefur verið LU þáttun $A = LU$.

Skref 1. Setjum $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$. Leysið jöfnuhneppið $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$.

Skref 2. Leysið jöfnuhneppið $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, fyrir $\mathbf{x}$, þar sem $\mathbf{y}$ er lausn $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$.

9.5 Skilgreining. (i) Látum A vera $m \times n$ fylki. *Bylta fylki* A (e. transpose) er $n \times m$ fylki B þannig að stakið b_{ij} í B er jafnt stakinu a_{ji} í A. Líka má lýsa B með því að segja að i-ti dálkvigur B sé jafn i-ta línuvigri A. Bylta fylki A er oft táknað með A^T.

(ii) Fylki A er sagt *samhverft* (e. symmetric) ef $A = A^T$.

9.6 Reiknireglur. Reglur um bylt fylki:

T1 Um öll fylki A gildir að

$$\left(A^T\right)^T = A.$$

T2 Um öll fylki A og allar rauntölur c gildir að

$$(cA)^T = cA^T.$$

T3 Ef A og B eru $m \times n$ fylki þá er

$$(A + B)^T = A^T + B^T.$$

T4 Ef A er $m \times n$ fylki og B er $n \times p$ fylki þá er

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

T5 Látum A vera $n \times n$ fylki. Ef fylkið A er andhverfanlegt þá er fylkið A^T einnig andhverfanlegt og $\left(A^T\right)^{-1} = (A^{-1})^T$.

9.7 Setning (i) Látum $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ vera (dálk)vigra í $\mathbf{R}^n$. Þá er $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$. (Vinstra megin í jöfnunni er depilmargfeldi tveggja vigra, en í hægri hlið er er fylkjamargfeldi $1 \times n$ fylkis $\mathbf{x}^T$ við $n \times 1$ fylki $\mathbf{y}$. Útkoman úr fylkjamargfeldinu er 1×1 fylki sem við hugsum sem tölu.)

(ii) Látum A vera $m \times n$ fylki, $\mathbf{x}$ vigur í $\mathbf{R}^n$ og $\mathbf{y}$ vigur i $\mathbf{R}^m$. Þá er $A\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot A^T\mathbf{y}$. (Athugið að í vinstri hlið jöfnunnar er depilmargfeldi tveggja vigra í $\mathbf{R}^n$ en í hægri hlið er depilmargfeldi tveggja vigra í $\mathbf{R}^m$.)