

# LÍNULEG ALGEBRA OG RÚMFRÆÐI

## 8. ANDHVERF FYLKI.

**8.1 Skilgreining.** Við segjum að  $n \times n$  fylki  $A$  sé *andhverfanlegt* (e. invertible) ef til er  $n \times n$  fylki  $B$  þannig að

$$AB = I_n \quad \text{og} \quad BA = I_n.$$

Fylkið  $B$  er kallað *andhverfa* (e. inverse of)  $A$  og andhverfa  $A$ , ef til er, er oft táknuð með  $A^{-1}$ .

Ef  $B$  er andhverfa  $A$  þá er  $A$  sjálfkrafa andhverfa  $B$ .

**8.2 VARÚÐ! HÆTTA!** Aðeins ferningsfylki **geta** mögulega haft andhverfur.

**8.3 Setning.** Látum  $A$  vera  $n \times n$  fylki. Fylkið  $A$  er andhverfanlegt þá og því aðeins að  $\text{rank}(A) = n$ .

(Í bók er sagt að  $n \times n$  fylki  $A$  sé „nonsingular“ ef  $\text{rank}(A) = n$ . Samkvæmt setningunni er fylki „nonsingular“ ef og aðeins ef það er andhverfanlegt (invertible).)

**8.4 Setning.** Ef  $A$  og  $B$  eru  $n \times n$  fylki þannig að  $BA = I_n$  þá er  $B = A^{-1}$  og  $A = B^{-1}$ .

**8.5 Setning.** Gerum ráð fyrir að  $A$  og  $B$  séu tvö andhverfanleg  $n \times n$  fylki. Þá er margfeldi þeirra  $AB$  líka andhverfanlegt og  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

**8.6 Reikniaðferð.** Hér er  $A$   $n \times n$  ferningsfylki. Aðferðin finnur  $A^{-1}$  ef til er.

**Skref 1.** Stillum upp auknu fylki  $[A \mid I_n]$ . (Í vinstri hluta er  $A$  og í hægri hluta kemur einingarfylki af sömu stærð.)

**Skref 2.** Notaðu línuaðgerðir á aukna fylkið  $[A \mid I_n]$  til að breyta því í aukið fylki af taginu  $[I_n \mid B]$ .

**Skref 3.** Ef ykkur tekst að ljúka **Skref 2** þá er fylkið  $B$  andhverfa  $A$ . Ef í ljós kemur að ekki er hægt með línuaðgerðum að breyta  $[A \mid I_n]$  í  $[I_n \mid B]$  þá er fylkið  $A$  ekki andhverfanlegt (það sem gerist er að þið fáið línu sem er bara með 0-um í vinstri hluta þegar þið framkvæmið línuaðgerðirnar).

**Skref 4.** Prófið útreikninga. Ef þið hafið fundið fylki  $B$  sem er kandídat fyrir andhverfu  $A$ , athugið þá hvort  $AB$  er jafnt og  $I_n$ . Ef ekki þurfið þið að skoða útreikninga ykkar.

**8.7 Setning** Fylki

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

er þá og því aðeins andhverfanlegt að  $ad - bc \neq 0$ . Ef  $ad - bc \neq 0$  þá er

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

**8.8 Skilgreining.** Ferningsfylki sem fá má út úr einingarfylki með því að beita aðeins einni línuaðgerð kallast *frumfylki* (e. elementary matrix).

**8.9 Athugasemd.** Í frumfylkjum eru „flest“ stökin 0. Í bókinni eru 0-in ekki alltaf prentuð með.

**8.10 Setning.** Látum  $A$  vera  $m \times n$  fylki og  $E$  vera  $m \times m$  frumfylki sem var fengið með því beita línuaðgerð á  $m \times m$  einingarfylki. Ef þessari línuaðgerð er beitt á  $A$  þá fæst út fylkið  $EA$ . (Að margfalda  $A$  með  $E$  frá vinstri hefur sömu áhrif og að beita línuaðgerðinni.)

**8.11 Setning.** Sérhvert frumfylki er andhverfanlegt.

**8.12 Setning.** Eftirfarandi skilyrði á  $n \times n$  fylki  $A$  eru jafngild:

- (i)  $A$  er andhverfanlegt.
- (ii) Beita má línuaðgerðum á  $A$  til að fá einingarfylkið  $I_n$ .
- (iii) Jafnan  $Ax = b$  hefur lausn fyrir sérhvern vigur  $b$  í  $\mathbf{R}^n$ .
- (iv) Hægt er að rita  $A$  sem margfeldi frumfylkja.