

LÍNULEG ALGEBRA OG RÚMFRÆÐI

7. FYLKI.

7.1 Skilgreining. *Fylki* (e. matrix) er rétthyrndur talnareitur

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Talan a_{ij} er í i -tu línu og j -ta dálki.

Stærð fylkis er táknuð með (fjöldi lína) \times (fjöldi dálka), t.d. hefur fylkið hér að ofan m línur og n dálka og stærð þess er því $m \times n$. Notum $\mathcal{M}_{m \times n}$ til að tákna mengi allra $m \times n$ fylkja.

Tvö fylki hafa sömu stærð (eru jafnstór) ef þau hafa sama línufjölda og sama dálkafjölda.

Tvö fylki A og B eru sögð jöfn ef þau eru jafnstór og fyrir allar tölur i og j er $a_{ij} = b_{ij}$.

7.2 Skilgreining. Fylki með aðeins einn dálk kallast *dálkvigur* (e. column vector) og fylki með aðeins eina línu kallast *línuvigur* (e. row vector).

Við gerum venjulega ekki greinarmun á 1×1 fylkinu $[a]$ og tölunni a .

7.3 Skilgreining. Látum

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

vera $m \times n$ fylki. Í fylkinu A er i -ti *línuvigurinn* vigurinn $\mathbf{A}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, og j -ti *dálkvigurinn* er $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$. Hver línuvigur hefur n hnit, en hver dálkvigur hefur m hnit.

7.4 Skilgreining. Fylki sem hefur jafnmargar línur og dálka kallast *ferningsfylki* (e. square matrix).

Látum nú A vera $n \times n$ ferningsfylki.

Stökin a_{ii} eru sögð liggja á *hornalínunni* (e. diagonal). Fylki sem er þannig að öll stökin sem eru ekki á hornalínunni eru 0 er kallað *hornalínufylki* (e. diagonal matrix). Í hornalínufylki er $a_{ij} = 0$ alltaf þegar $i \neq j$.

Fylki þar sem öll stökin fyrir neðan hornalínuna eru 0 er kallað *efra þríhyrningsfylki* (e. upper triangular matrix), og fylki þar sem öll stökin fyrir ofan hornalínuna eru núll kallast *neðra þríhyrningsfylki* (e. lower triangular matrix).

7.5 Skilgreining. Hægt er að leggja saman tvö fylki ef þau hafa sömu stærð og margfalda fylki af hvaða stærð sem er með tölu.

Samlagning tveggja $m \times n$ fylkja A og B er skilgreind þannig að útkoman er $m \times n$ fylki C með $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, eða

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Margföldun fylkis A með tölu c er skilgreind þannig að sérhvert stak í A margfaldast með c , þannig að

$$c \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}.$$

7.6 Reiknireglur. Látum A , B og C standa fyrir $m \times n$ fylki og c og d vera tölur. Fylki af stærðinni $m \times n$ sem er með 0 í öllum sætum er kallað *núllfylki* og er táknað með O . Eftirfarandi reglur gilda um samlagningu fylkja:

A1	$A + B = B + A$	Víxlregla samlagningar
A2	$(A + B) + C = A + (B + C)$	Tengiregla samlagningar
A3	$O + A = A + O = A$	Núllfylkið er samlagningarhlutleysa
A4	Til er fylki $-A$ þannig að $A + (-A) = O$	Samlagningar andhverfa er til

Eftirfarandi reglur gilda um margföldun fylkis með tölu:

S1	$c(dA) = (cd)A$	Tengiregla
S2	$c(A + B) = cA + cB$	Dreifiregla
S3	$(c + d)A = cA + dA$	Dreifiregla
S4	$1A = A$	Margföldun með 1 er hlutleysa

7.7 Skilgreining. Hægt er að margfalda saman $m \times s$ fylki A og $s \times n$ fylki B og fá út $m \times n$ fylki C . Stakið í i -tu línu og j -ta dálki í C er gefið með formúlunni

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj}.$$

Þessum má líka lýsa þannig að talan c_{ij} sé depilmargfeldi i -ta línuvigurs A og j -ta dálkvigurs B . Síðustu lýsinguna er gott að muna með hjálp skammstöfunarinnar

$$LSD = \text{lína sinnum dálkur}.$$

7.8 VARÚÐ! HÆTTA! Margfeldi AB af tveimur fylkjum er ekki skilgreint nema dálkafjöldi þess fyrra sé jafn línu fjöldi þess seinna.

7.9 Reiknireglur.

M1 Ef A er $m \times s$ fylki og B er $s \times n$ fylki þá er

$$r(AB) = (rA)B = A(rB).$$

M2 Ef A er $m \times s$ fylki, B er $s \times t$ fylki og C er $t \times n$ þá er

$$A(BC) = (AB)C.$$

M3 Ef A er $m \times s$ fylki og B og C eru $s \times n$ fylki þá er

$$A(B + C) = AB + AC.$$

M4 Ef A og B eru $m \times s$ fylki og C er $s \times n$ fylki þá er

$$(A + B)C = AC + BC.$$

7.10 Skilgreining. Ferningsfylkið

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

af stærð $n \times n$ kallast $(n \times n)$ -*einangarfylkið* (e. $n \times n$ identity matrix).

7.9 Framhald.

M5 Ef A er $n \times n$ fylki þá er

$$AI_n = I_n A = A.$$

7.11 VARÚÐ! HÆTTA!. (i) Víxlregla gildir **ekki** um fylkjamargföldun. Auðvelt er að búa til dæmi um fylki A og B þannig að AB er ekki jafnt BA .

(ii) Ekki er hægt að deila með fylkjum. Ekki er heldur hægt að álykta almennt af því að $AC = BC$, að þá þurfi að gilda að A sé jafnt og B .