Línuleg algebra og rúmfræði

6. Meira um lausnir línulegra jöfnuhneppa.

6.1 Setning. Látum A vera fylki. Til eru mörg jafngild fylki á efra stallaformi, en fjöldi pinna í þeim er alltaf sá sami og pinnarnir eru í sömu dálkum. Aðeins er til eitt jafngilt fylki á ruddu efra stallaformi.

6.2 Skilgreining. Látum $[A \mid \mathbf{b}]$ vera aukið fylki sem stendur fyrir jöfnuhneppi með breytum $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Látum svo $[H \mid \mathbf{b}']$ vera jafngilt fylki á efra stalla formi. Þær breytur sem tilheyra dálkum í $[H \mid \mathbf{b}']$ þar sem er pinni kallast *pinnabreytur*, en þær breytur sem tilheyra dálkum þar sem er enginn pinni kallast *frjálsar breytur*.

6.3 Skilgreining. Látum A vera fylki. *Stétt* (e. rank) A, táknað $\mathrm{rank}(A)$, er fjöldi pinna (fjöldi lína sem eru ekki bara með 0-um) í efra stalla formi A.

6.4 Setning. (i) Línulegt jöfnuhneppi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hefur lausn ef og aðeins ef stétt aukna fylkisins $[A \mid \mathbf{b}]$ er jöfn stétt fylkisins A.

(ii) Ef fylkið A hefur m línur og $\mathrm{rank}(A) = m$ þá hefur sérhvert jöfnuhneppi af taginu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lausn.

6.5 Skilgreining. Jöfnuhneppi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kallast *hliðrað* (e. inhomogeneous) ef $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Jöfnuhneppi af taginu $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kallast *óhliðrað* (e. homogeneous).

6.6 Setning. Óhliðrað jöfnuhneppi $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hefur annað hvort bara lausnina $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (lausnin $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ á jöfnu $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er oft kölluð *fáfengilega lausnin* (e. trivial solution)) eða það hefur óendanlega margar lausnir.

6.7 Setning. Gerum ráð fyrir að $\mathbf{u}_1$ sé einhver einn lausnarvigur $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Sérhverja lausn $\mathbf{u}$ á $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má rita á forminu $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}$ þar sem $\mathbf{v}$ er lausn óhliðraða jöfnuhneppisins $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Öfugt gildir að sérhver vigur á forminu $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}$, þar sem $\mathbf{v}$ er lausn $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, er lausn á $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

6.8 Setning. Skoðum lausnir jöfnuhneppis $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Þá er eru þrír möguleikar á fjölda lausna:

(i) Jöfnuhneppið er ósamkvæmt og hefur enga lausn.

(ii) Jöfnuhneppið er samkvæmt og hefur nákvæmlega eina lausn.

(iii) Jöfnuhneppið er samkvæmt og hefur óendanlega margar lausnir.

6.9 Setning. Skoðum lausnir jöfnuhneppis $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ og gerum ráð fyrir að jöfnuhneppið hafi lausn. Þá hefur jöfnuhneppið $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nákvæmlega eina lausn ef og aðeins ef óhliðraða jöfnuhneppið $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hefur bara lausnina $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

6.10 Fjöldi lausna jöfnuhneppis.

Finna á fjölda lausna línulegs jöfnuhneppis $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Skref 1. Byrjum á að setja upp aukið fylki $[A \mid \mathbf{b}]$ samsvarandi jöfnuhneppinu.

Skref 2. Notið línuaðgerðir til að fá aukið fylki $[H \mid \mathbf{b}']$ þar sem H hefur efra stallaform.

Skref 3. Ef $[H \mid \mathbf{b}']$ hefur línu bara með 0-um í vinstri hluta og tölu sem er ekki 0 í hægri hluta þá hefur jöfnuhneppið **enga lausn**.

Ef engin slík lína er í $[H \mid \mathbf{b}']$ þá koma upp tveir möguleikar: **(a)** pinni í sérhverjum dálk og þá hefur jöfnuhneppið **nákvæmlega eina lausn**, og **(b)** einhver dálkur hefur engan pinna og þá hefur jöfnuhneppið **óendanlega margar lausnir**.

6.11 Setning. Skoðum jöfnuhneppi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ með m jöfnum og n óþekktum stærðum. Setjum $r = \text{rank}(A)$.

(i) Ef jöfnuhneppið hefur enga lausn þá er $r < m$.

(ii) Ef jöfnuhneppið hefur nákvæmlega eina lausn þá er $n = r$ og $m \geq n$.

(iii) Ef jöfnuhneppið hefur óendanlega margar lausnir þá er $r < n$.

6.12 Skilgreining. Ef A er $n \times n$ fylki og $\text{rank}(A) = n$ þá er sagt að A sé *andhverfanlegt* (e. nonsingular). Ef $\text{rank}(A) < n$ þá segjum við að A sé *óandhverfanlegt* (e. singular).

6.13 Setning. Látum A vera $n \times n$ fylki. Þá eru eftirfarndi skilyrði jafngild:

(i) A er andhverfanlegt, þ.e.a.s. $\text{rank}(A) = n$.

(ii) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hefur aðeins lausnina $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(iii) Fyrir sérhvern vigur $\mathbf{b}$ í $\mathbf{R}^n$ hefur jafnan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nákvæmlega eina lausn.