Línuleg algebra og rúmfræði

5. Eiginleikar lausna línulegra jöfnuhneppa.

5.1 Skilgreining. Jöfnuhneppi sem hefur enga lausn er sagt *ósamkvæmt* (e. inconsistent), en jöfnuhneppi sem hefur lausn (þ.e.a.s. a.m.k. eina lausn) er sagt *samkvæmt* (e. consistent).

5.2 Skilgreining. Látum A vera fylki. *Stétt* (e. rank) A, táknað $\operatorname{rank}(A)$, er fjöldi pinna (fjöldi lína sem eru ekki bara með 0-um) í efra stalla formi A.

5.3 Setning. (i) Látum $[A \mid \mathbf{b}]$ vera jöfnuhneppi og $[H \mid \mathbf{b}']$ efra stallaform þess. Jöfnuhneppið er þá ósamkvæmt (hefur enga lausn) ef og aðeins ef í $[H \mid \mathbf{b}']$ kemur fyrir lína sem er bara með 0-um í vinstri hlutanum en í dálkinum til hægri er í þeirri línu tala sem er ekki 0. Ef engin slík lína er er í $[H \mid \mathbf{b}']$ þá hefur jöfnuhneppið að minnsta kosti eina lausn.

(ii) Línulegt jöfnuhneppi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hefur lausn ef og aðeins ef stétt aukna fylkisins $[A \mid \mathbf{b}]$ er jöfn stétt fylkisins A.

5.4 Setning. Ef fylkið A hefur m línur og $\operatorname{rank}(A) = m$ þá hefur sérhvert jöfnuhneppi af taginu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lausn.

5.5 Skilgreining. Látum A vera $m \times n$ fylki

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Skilgreinum j-ta dálkvigur A sem vigurinn

$$\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

5.6 Setning. Jafna $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hefur lausn ef og aðeins ef hægt er að rita $\mathbf{b}$ sem línulega samantekt dálkvigra A.

5.7 Setning. Látum A vera $m \times n$ fylki og $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ dálkvigrar með n hnitum hvor. Látum r standa fyrir rauntölu. Þá er

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} \qquad \text{og} \qquad A(r\mathbf{x}) = r(A\mathbf{x}).$$

5.8 Skilgreining. Jöfnuhneppi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kallast *hliðrað* (e. inhomogeneous) ef $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Jöfnuhneppi af taginu $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kallast *óhliðrað* (e. homogeneous).

5.9 Setning. Óhliðrað jöfnuhneppi $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hefur annað hvort bara lausnina $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eða það hefur óendanlega margar lausnir.

5.10 Setning. Gerum ráð fyrir að $\mathbf{u}_1$ sé einhver einn lausnarvigur $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Sérhverja lausn $\mathbf{u}$ á $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má rita á forminu $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}$ þar sem $\mathbf{v}$ er lausn óhliðraða jöfnuhneppisins $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Öfugt gildir að sérhver vigur á forminu $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}$, þar sem $\mathbf{v}$ er lausn $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, er lausn á $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

5.11 Setning. Skoðum lausnir jöfnuhneppis $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Þá er eru þrír möguleikar á fjölda lausna:

(i) Jöfnuhneppið er ósamkvæmt og hefur enga lausn.

(ii) Jöfnuhneppið er samkvæmt og hefur nákvæmlega eina lausn.

(iii) Jöfnuhneppið er samkvæmt og hefur óendanlega margar lausnir.