Línuleg algebra og rúmfræði
4. Línuleg jöfnuhneppi.

4.1 Skilgreining. Jafna af taginu

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

kallast *línuleg jafna*. Það sem auðkennir línulegar jöfnur er að breyturnar koma bara fyrir í 1. veldi og engin margfeldi tveggja eða fleiri breyta koma fyrir í jöfnunni.

Línulega jöfnu eins og hér að ofan má líka rita sem $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = b$ þar sem $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

4.2 Skilgreining. *Línulegt jöfnuhneppi* samanstendur af einni eða fleiri línulegum jöfnum og er oft sett upp á forminu

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 &+ a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{aligned}$$

Lausn jöfnuhneppisins er vigur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ þannig að allar jöfnurnar í jöfnuhneppinu séu uppfylltar. Það að leysa línulegt jöfnuhneppi felst í því að finna öll möguleg gildi á vigrinum $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

4.3 Skilgreining. Byrjum með línulegt jöfnuhneppi

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 &+ a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{aligned}$$

Stuðlafylki jöfnuhneppisins er fylkið

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Fylkið A er sagt hafa stærðina $m \times n$, sem segir að A hafi m línur og n dálka.

Skilgreinum *i-ta línuvigur* (e. row vector) fylkisins sem vigurinn

$$\mathbf{A}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}).$$

Breytuvigur jöfnuhneppisins er dálkvigurinn (e. column vector)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Hægri hlið jöfnuhneppisins er dálkvigurinn

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Aukið fylki (e. augmented matrix), eða *skipt fylki*, jöfnuhneppisins er skilgreint sem

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Aukna fylkið er „skammstöfun" á þeim upplýsingum sem felast í jöfnuhneppinu.

4.4 Skilgreining. Látum A vera $m \times n$ fylki og $\mathbf{x}$ dálkvigur með n hnitum. Margfeldi A og $\mathbf{x}$ er skilgreint sem dálkvigur með m hnitum þannig að

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & \mathbf{A}_1 & - \\ - & \mathbf{A}_2 & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{A}_m & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_m \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix}.$$

4.5 Setning. Ef A er stuðlafylki jöfnuhneppis, $\mathbf{x}$ er breytuvigurinn, og $\mathbf{b}$ er hægri hliðin, þá samsvarar upphaflega jöfnuhneppið fylkjajöfnunni $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, eða

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Upphaflega jöfnuhneppið og jafnan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hafa sömu lausnir.

4.6 Ritháttur. Við lítum svo á að línulegt jöfnuhneppi, aukið fylki $[A \mid \mathbf{b}]$ og fylkjajafna $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ séu jafngildar framsetningar á sama hlutnum.

4.7 Línuaðgerðir. Eftirfarandi aðgerðir má augljóslega framkvæma á jöfnuhneppi án þess að breyta því hvaða lausnir jöfnuhneppið hefur.

(Að1) Við getum víxlað á einhverjum tveimur jöfnum.

(Að2) Við getum margfaldað jöfnu (báðum megin við jafnaðarmerkið „=") með fasta $r \neq 0$.

(Að3) Í stað jöfnu kemur summa jöfnunnar við margfeldi af einhverri annarri jöfnu.

Þessar aðgerðir samsvara eftirfarandi aðgerðum á aukið fylki:

R1 Víxla á einhverjum tveimur línum.

R2 Margfalda línu með fasta $r \neq 0$.

R3 Í stað línu L_i kemur summan $L_i + rL_j$ þar sem $j \neq i$.

Framkvæma þarf aðgerðirnar bæði á vinstri og hægri hluta fylkisins. Þessar aðgerðir eru kallaðar *línuaðgerðir* (e. elementary row operations).

Tvö aukin fylki $[A \mid \mathbf{b}]$ og $[A' \mid \mathbf{b}']$ eru sögð *jafngild*, ritað $[A \mid \mathbf{b}] \rightsquigarrow [A' \mid \mathbf{b}']$ ef hægt er að fá annað út úr hinu með því að beita línuaðgerðum.

Varúð! Hætta! Fylkin sem eru „jafngild" eru ekki **jöfn** og því má ekki nota „samasem merki" á milli fylkja þegar línuaðgerðir eru notaðar.

4.8 Setning. Ef $[A \mid \mathbf{b}]$ og $[A' \mid \mathbf{b}']$ eru jafngild aukin fylki þá hafa samsvarandi jöfnuhneppi nákvæmlega sömu lausnir.

4.9 Skilgreining. Látum $[A \mid \mathbf{b}]$ vera aukið fylki. Fremsti stuðullinn sem er ekki 0 í hverri línu kallast *leiðari* (e. leading entry). Leiðari kallst *pinni* (e. pivot) ef það er enginn annar leiðari fyrir ofan hann í sama dálki. Pinnar eru líka kallaðir *vendistuðlar*.

Sagt er að aukið fylki sé á *efra stallaformi* (e. echelon form) ef eftirfarandi tvö skilyrði eru uppfyllti:

(ES1) Þær línur sem innihalda bara 0 eru neðst í fylkinu.

(ES2) Um hverja línu gildir að fyrir neðan (í sama dálki) fremsta ekki 0 stakið eru bara 0.

Við segjum að aukið fylki sé á *ruddu efra stalla formi* (e. reduced echelon form) ef það er á efra stallaformi, sérhver pinni er 1 og bæði fyrir ofan og neðan (í sama dálki) sérhvern pinna eru bara 0.

4.10 Skilgreining. Látum $[A \mid \mathbf{b}]$ vera aukið fylki sem stendur fyrir jöfnuhneppi með breytum $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Látum svo $[H \mid \mathbf{b}']$ vera jafngilt fylki á efra stalla formi. Þær breytur sem tilheyra dálkum í $[H \mid \mathbf{b}']$ þar sem er pinni kallast *pinnabreytur*, en þær breytur sem tilheyra dálkum þar sem enginn pinni er kallast *frjálsar breytur*.