Línuleg algebra og rúmfræði

3. Línur, plön og háplön

3.1 Skilgreining. *Lína* í $\mathbf{R}^n$ er mengi allra punkta sem má rita á forminu

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v},$$

þar sem $\mathbf{x}_0$ og $\mathbf{v}$ er fastir gefnir vigrar og t er rauntala (stiki).

Vigurinn $\mathbf{v}$ kallast *stefnuvigur* línunnar. (Athugið að stefnuvigur er ekki ótvírætt ákvarðaður – ef $\mathbf{v}$ er stefnuvigur línu þá er $r\mathbf{v}$, þar sem er $r \neq 0$ er rauntala einnig stefnuvigur línunnar.)

3.2 Setning og skilgreining. Látum $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ vera vigra í $\mathbf{R}^n$. Gerum ráð fyrir að $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Þá eru til vigrar $\mathbf{x}^{\|}$ og $\mathbf{x}^{\perp}$ í $\mathbf{R}^n$ þannig að **(i)** $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\|} + \mathbf{x}^{\perp}$, **(ii)** vigurinn $\mathbf{x}^{\|}$ er margfeldi af $\mathbf{y}$ og **(iii)** vigurinn $\mathbf{x}^{\perp}$ er hornréttur á $\mathbf{y}$. Vigrarnir $\mathbf{x}^{\|}$ og $\mathbf{x}^{\perp}$ eru ótvírætt ákvarðaðir og

$$\mathbf{x}^{\|} = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{x}^{\perp} = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y}.$$

Ofanvarp $\mathbf{x}$ *á vigurinn* $\mathbf{y}$ er skilgreint sem vigurinn

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{y}}\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y}.$$

3.3 Skilgreining. Plan í $\mathbf{R}^3$ spannað af vigrunum $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ í gegnum punktinn $\mathbf{x}_0$ er mengi allra vigra $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ sem hægt er að rita á forminu

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v},$$

þar sem s og t er stikar.

3.4 Skilgreining. Látum $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vera vigra í $\mathbf{R}^n$ og $c_1, c_2, \ldots, c_n$ vera tölur. Vigurinn

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$

kallast *línuleg samantekt* vigranna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ með stuðla $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

Mengi allra línulegra samantekta vigranna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ er kallað *spann* þeirra og táknað $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$.

3.5 Setning. (i) Látum ℓ vera línu í $\mathbf{R}^2$ sem hefur kartesíska jöfnu $a_1x_1 + a_2x_2 = b$. Vigurinn $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ er hornréttur á línuna (er hornréttur á stefnuvigur hennar).

(ii) Plan $\mathcal{P}$ í $\mathbf{R}^3$ hefur kartesíska jöfnu $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$. Vigurinn $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ er hornréttur á planið (m.ö.o. $\mathbf{a}$ er þvervigur á planið).

Öfugt gildir að ef $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ er þvervigur á planið $\mathcal{P}$ þá er jafna $\mathcal{P}$ á forminu $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$.

3.6 Skilgreining. Látum $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq \mathbf{0}$ vera vigur í $\mathbf{R}^n$. Lausnamengi jöfnu af taginu $\mathbf{a}\cdot\mathbf{x} = b$ kallast *háplan* í $\mathbf{R}^n$. (Háplan í $\mathbf{R}^n$ er lausnamengi jöfnu af taginu $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ þar sem að minnsta kosti eitt hnit a_i er ekki 0.)

3.7 Regla. Háplan í $\mathbf{R}^n$ hefur stikaframsetningu af taginu

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \cdots t_{n-1}\mathbf{v}_{n-1},$$

þar sem $\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ eru vigrar og $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ stikar.

4. september 2005 Rögnvaldur G. Möller