

LÍNULEG ALGEBRA OG RÚMFRÆÐI

2. VIGRAR

2.1 Skilgreining. Vigur \mathbf{x} í \mathbf{R}^n er röðuð n -nd $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ af rauntölum. Vigurinn $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ kallast *núllvigurinn* í \mathbf{R}^n .

2.2 Skilgreining. Látum $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ og $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vera vigra í \mathbf{R}^n .

Samlagning vigra er skilgreind þannig að

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

Frádráttur vigra er skilgreindur þannig að

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n).$$

Margföldun vigurs með tölu er skilgreind þannig að ef $r \in \mathbf{R}$ þá er

$$r\mathbf{x} = (rx_1, rx_2, \dots, rx_n).$$

Vigurinn $-\mathbf{x}$ er skilgreindur sem

$$-\mathbf{x} = -(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n).$$

2.3 Reiknireglur. Látum \mathbf{x} , \mathbf{y} og \mathbf{z} vera vigra í \mathbf{R}^n . Einnig látum við r og s standa fyrir rauntölur. Eftirfarandi reglur gilda um samlagningu:

A1	$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$	Tengiregla samlagningar
A2	$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$	Víxlregla samlagningar
A3	$\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$	Núllvigurinn er samlagningarhlutleysa
A4	$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$	Samlagningarandhverfa

Eftirfarandi reglur gilda um margföldun með tölu:

S1	$r(\mathbf{u} + \mathbf{x}) = r\mathbf{u} + r\mathbf{x}$	Dreifiregla
S2	$(r + s)\mathbf{x} = r\mathbf{x} + s\mathbf{x}$	Dreifiregla
S3	$r(s\mathbf{x}) = (rs)\mathbf{x}$	Tengiregla
S4	$1\mathbf{x} = \mathbf{x}$	Margföldunarhlutleysa

2.4 Skilgreining. Tveir vigrar \mathbf{x} og \mathbf{y} í \mathbf{R}^n , hvorugur þeirra núllvigurinn, eru sagðir *samsíða* ef til er tala r þannig að $\mathbf{x} = r\mathbf{y}$ eða $\mathbf{y} = r\mathbf{x}$. Ef vigrarnir \mathbf{x} og \mathbf{y} eru samsíða er oft ritað $\mathbf{x} \parallel \mathbf{y}$. Ef $\mathbf{x} = r\mathbf{y}$ og $r > 0$ þá segjum við að vigrarnir hafi *sömu stefnu*, en *gagnstæða stefnu* ef $r < 0$.

2.5 Skilgreining. Látum $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vera vigur í \mathbf{R}^n . *Lengd* vigursins \mathbf{x} er skilgreind sem

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

2.6 Reiknireglur. Um alla vigra \mathbf{x} og \mathbf{y} í \mathbf{R}^n og allar tölur r gildir að

L1	$\ \mathbf{x}\ \geq 0$ og $\ \mathbf{x}\ = 0$ ef og aðeins ef $\mathbf{x} = \mathbf{0}$	Jákvæðni
L2	$\ r\mathbf{x}\ = r \ \mathbf{x}\ $	Einsleitni
L3	$\ \mathbf{x} + \mathbf{y}\ \leq \ \mathbf{x}\ + \ \mathbf{y}\ $	Þríhyrningsójafnan

2.7 Skilgreining. Vigur \mathbf{x} í \mathbf{R}^n kallast *einingarvigur* ef $\|\mathbf{x}\| = 1$.

2.8 Skilgreining. *Depilmargfeldi* vigra $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ og $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ í \mathbf{R}^n er skilgreint sem talan

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

2.9 Reiknireglur. Um alla vigra \mathbf{x} , \mathbf{y} og \mathbf{z} í \mathbf{R}^n og allar tölur r gildir að

D1	$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$	Víxlregla
D2	$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$	Dreifiregla
D3	$r(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (r\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (r\mathbf{y})$	Tengiregla
D4	$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ og $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ ef og aðeins ef $\mathbf{x} = \mathbf{0}$	Jákvæðni
D5	$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \ \mathbf{x}\ ^2$	Depilmargfeldi og lengd

2.10 Skilgreining. Tveir vigrar \mathbf{x} og \mathbf{y} eru sagðir *hornréttir*, táknað $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, ef $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

2.11 Skilgreining. *Hornið* á milli vigrana \mathbf{x} og \mathbf{y} er skilgreint sem

$$\theta = \arccos \left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \right).$$

2.9 Reiknireglur (framhald). Látum $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ og $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ vera vigra í \mathbf{R}^n og θ hornið á milli þeirra. Þá gildir

$$D6 \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta \quad \text{Depilmargfeldi og horn}$$

2.12 Setning. (Ójafna Cauchy og Schwarz) Um alla vigra \mathbf{x} og \mathbf{y} í \mathbf{R}^n gildir að

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|.$$

Ef reiknað er með hnitum má fá jafngilda ójöfnu

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right).$$