Línuleg algebra og rúmfræði

28. Fylki og vigrar með tvinntölum.

28.1 Skilgreining. Skilgreiningin á *vigurrúmi yfir tvinntölur* er eins og skilgreining á vigurrúmi yfir rauntölur (sjá Skilgreining 14.1) nema að þegar að talað er um margföldun vigurs með tölu er átt við margföldun vigurs með tvinntölu.

28.2 Skilgreining. Látum $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ og $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vera vigra í $\mathbf{C}^n$. *Innfeldi* vigranna $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er skilgreint sem tvinntalan

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{u_1} v_1 + \overline{u_2} v_2 + \cdots + \overline{u_n} v_n.$$

28.3 Reiknireglur. Látum $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ vera vigra í $\mathbf{C}^n$ og z tvinntölu. Þá gildir:
(i) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ og $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ ef og aðeins ef $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
(ii) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$.
(iii) $\langle (\mathbf{u} + \mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
(iv) $\langle \mathbf{w}, (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$.
(v) $\langle z\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{z} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ og $\langle \mathbf{u}, z\mathbf{v} \rangle = z \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

28.4 Skilgreining. *Lengd* vigurs $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ í $\mathbf{C}^n$ er skilgreind sem rauntalan

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\overline{v_1} v_1 + \overline{v_2} v_2 + \cdots + \overline{v_n} v_n}.$$

28.5 Þumalputtaregla. Allt sem við kemur vigrum, vigurrúmum og fylkjum þannig að innfeldi blandast ekki í málið er eins fyrir vigurrúm yfir rauntölur og vigurrúm yfir tvinntölur. Sérstaklega gilda þekktar reikniaðferðir til að leysa samsvarandi verkefni með tvinntölum.

28.6 Skilgreining. Látum A vera $m \times n$ tvinntalnafylki.
(i) Skilgreinum *samoka* fylki A, táknað $\overline{A}$, sem fylkið sem fæst ef allar tölur í A eru samokaðar.
(ii) *Aðoka* (e. conjugate transpose, Hermitian adjoint) fylki A er skilgreint sem fylkið $A^* = (\overline{A})^T$.

28.7 Setning. Látum A og B vera $m \times n$ tvinntalnafylki.
(i) $(A^*)^* = A$.
(ii) $(A + B)^* = A^* + B^*$.
(iii) $(zA)^* = \overline{z} A^*$ fyrir allar tvinntölur z.
(iv) Ef A og B eru ferningsfylki þá er $(AB)^* = B^* A^*$.

28.8 Skilgreining. Ferningsfylki H er sagt *sjálfoka* (eða *Hermískt*) ef $H^* = H$.

28.9 Setning. Fylki $A = [a_{ij}]$ er sjálfoka ef og aðeins ef bæði eftirfarandi skilyrði gilda
(i) fyrir öll i er a_{ii} rauntala (tölurnar á hornalínunni eru rauntölur), og
(ii) um allar tölur i og j gildir að $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ (tölur á samsvarandi stöðum sitt hvoru megin við hornalínuna eru samoka hvor annari).

28.10 Skilgreining. Ferningsfylki U er sagt *einoka* (e. unitary) ef $U^* U = I$.

28.11 Setning. Eftirfarandi skilyrði um $n \times n$ tvinntalnafylki U eru jafngild:
(i) U er einoka.
(ii) $U^{-1} = U^*$.
(iii) Dálkvigrar U eru allt einingarvigrar og þeir eru hornréttir hver á annan.
(iv) Línuvigrar U eru allt einingarvigrar og þeir eru hornréttir hver á annan.

28.12 Fylgisetning. Látum A vera $n \times n$ fylki sem er bara með rauntölum.
(i) Fylkið A er sjálfoka ef og aðeins ef það er samhverft.
(ii) Fylkið A er einoka ef og aðeins ef það er þverstaðlað.

28.13 Setning. Ef A er sjálfoka tvinntalnafylki þá er til einoka fylki A þannig að $D = U^{-1}AU = U^*AU$ er hornalínufylki. Ennfremur gildir að eigingildi sjálfoka fylkis eru allt rauntölur.

28.14 Setning. Látum A vera $n \times n$ tvinntalnafylki. Ef til er einoka fylki U þannig að $D = U^{-1}AU$ er hornalínufylki með rauntölum, þá er A sjálfoka.

28.15 Skilgreining. Segjum að $n \times n$ tvinntalnafylki sé *normlegt* (e. normal) ef $A^*A = AA^*$.

28.16 Setning. Þau $n \times n$ tvinntalnafylki sem eru einoka hornalínugeranleg eru nákvæmlega þau fylki sem eru normleg.