

LÍNULEG ALGEBRA OG RÚMFRÆÐI

LAUSN Á DÆMUM 2.1.14A OG 2.2.15

2.1.14a: Sýnið að fylkið sem lýsir speglun um línu ℓ í gegnum $(0, 0)$ með stefnavigur $(\cos \theta, \sin \theta)$ er

$$R = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}.$$

Lausn. Hér er lausn sem sýnir vel að $R\mathbf{x}$ er í öllum tilvikum speglun \mathbf{x} um línuna. (Hér hugsum við \mathbf{x} sem vigur með upphafspunkt í $(0, 0)$.) Rita nú $\mathbf{y} = (\cos \theta, \sin \theta)$, sem er stefnavigur ℓ . Látum nú \mathbf{x}^{\parallel} tákna ofanvarp \mathbf{x} á vigurinn \mathbf{y} . Skilgreinum einnig $\mathbf{x}^{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{\parallel}$. Nú er gott að teikna mynd af þessu, á myndinni liggur \mathbf{x}^{\parallel} eftir línunni ℓ og fótþunktur vigursins \mathbf{x}^{\perp} er endapunktur \mathbf{x}^{\parallel} . Vigrarnir \mathbf{x} , \mathbf{x}^{\parallel} og \mathbf{x}^{\perp} mynda rétthyrndan þríhyrning þar sem \mathbf{x} er langhliðin. Þessi mynd lýsir því að $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\parallel} + \mathbf{x}^{\perp}$. Þegar \mathbf{x} er speglaður í ℓ er ljóst af teikningunni að útkoman er $\mathbf{x}_{sp} = \mathbf{x}^{\parallel} - \mathbf{x}^{\perp}$.

Nú getum við fundið formúlu fyrir \mathbf{x}_{sp} . Ritum $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ og $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. Rifjum upp að $\|\mathbf{y}\| = 1$. Ofanvarp \mathbf{x} á \mathbf{y} finnst með formúlunni

$$\mathbf{x}^{\parallel} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2} \mathbf{y} = \frac{(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2)}{1^2} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = (x_1 y_1 + x_2 y_2) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 y_1^2 + x_2 y_1 y_2 \\ x_1 y_1 y_2 + x_2 y_2^2 \end{bmatrix}.$$

Ef rýnt er í útkomuna hér að ofan sést að rita má hana á forminu

$$\mathbf{x}^{\parallel} = \begin{bmatrix} y_1^2 & y_1 y_2 \\ y_1 y_2 & y_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Sjáum nú að

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{sp} &= \mathbf{x}^{\parallel} - \mathbf{x}^{\perp} \\ &= \mathbf{x}^{\parallel} - (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\parallel}) \\ &= 2\mathbf{x}^{\parallel} - \mathbf{x} \\ &= 2 \begin{bmatrix} y_1^2 & y_1 y_2 \\ y_1 y_2 & y_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \left(2 \begin{bmatrix} y_1^2 & y_1 y_2 \\ y_1 y_2 & y_2^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2y_1^2 - 1 & 2y_1 y_2 \\ 2y_1 y_2 & 2y_2^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cos^2 \theta - 1 & 2 \cos \theta \sin \theta \\ 2 \cos \theta \sin \theta & 2 \sin^2 \theta - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= R\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Hér að ofan höfum við notað formúlur fyrir cosínus og sínus af tvöföldum hornum:

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta \quad \text{og} \quad \sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta.$$

Af reikningunum hér að ofan sést að til að finna speglun \mathbf{x} í ℓ er nóg að margfalda \mathbf{x} með fylkinu R .

2.2.15: Gerum ráð fyrir að A sé andhverfanlegt fylki og að A^{-1} sé þekkt.

(a) Gerum ráð fyrir að fylkið B sé búið til úr A með því að víxla á tveimur dálkum. Hvernig má finna B^{-1} út frá A^{-1} ?

(b) Gerum ráð fyrir að fylkið B sé búið til úr A með því að margfalda j -ta dálk A með tölu $r \neq 0$. Hvernig má finna B^{-1} út frá A^{-1} ?

(c) Gerum ráð fyrir að fylkið B sé búið til úr A með því að leggja margfeldi af einum dálk við annan. Hvernig má finna B^{-1} út frá A^{-1} ?

(d) Gerum ráð fyrir að fylkið B sé búið til úr A með því að skipta einum dálkvigli út fyrir einhvern annan vigur. Að því gefnu að fylkið B sé andhverfanlegt, hvernig má finna B^{-1} út frá A^{-1} ?

Lausn. Dálkvigrar A eru $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ og dálkvigrar B eru $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$. Táknum andhverfu A með C og ritum $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_n$ fyrir línuvigna C . Vitum að $CA = I_n$. Stakið í línu i og dálki j í margfeldinu CA fæst með því að reikna depilmargfeldið $\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{a}_j$. Af þessu sést að

$$\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{a}_j = \begin{cases} 0 & \text{ef } i \neq j \\ 1 & \text{ef } i = j. \end{cases}$$

(a) Hér er $\mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k$, nema að $\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_j$ og $\mathbf{b}_j = \mathbf{a}_i$. Búum til fylkið D úr $C = A^{-1}$ þannig að við víxlum á línunum i og j . Þá er $\mathbf{D}_k = \mathbf{C}_k$, nema að $\mathbf{D}_i = \mathbf{C}_j$ og $\mathbf{D}_j = \mathbf{C}_i$. Sjáum með því að skoða tilvik að

$$\mathbf{D}_k \cdot \mathbf{b}_l = \begin{cases} 0 & \text{ef } k \neq l \\ 1 & \text{ef } k = l. \end{cases}$$

Sem sagt, D er andhverfa B .

(b) Hér er $\mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k$, nema að $\mathbf{b}_j = r\mathbf{a}_j$ (dálkur j margfaldaður með $r \neq 0$). Búum til fylkið D með því að taka C og margfalda j -tu línu með $1/r$. Þá er $\mathbf{D}_k = \mathbf{C}_k$, nema að $\mathbf{D}_j = (1/r)\mathbf{C}_j$. Auðvelt að sjá að D er andhverfa B .

(c) Hér er $\mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k$, nema að $\mathbf{b}_j = \mathbf{a}_j + r\mathbf{a}_i$ (dálkur i lagður r -faldur við dálk j). Búum til fylkið D með því að taka C og draga j -tu línu r -falda frá i -tu línu. Þá er $\mathbf{D}_k = \mathbf{C}_k$, nema að $\mathbf{D}_i = \mathbf{C}_i - r\mathbf{C}_j$. Auðvelt að sjá að D er andhverfa B .

(d) Hér er $\mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k$, nema að $\mathbf{b}_j = \mathbf{v}$. Margfeldi C við B er eins og margfeldi

C við A , nema j -ti dálkurinn sem er jafn
$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{v} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_n \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix}. \quad \text{Við gerum ráð fyrir að } B$$

sé andhverfanlegt og því er fylkið CB (margfeldi tveggja andhverfanlegra fylkja) andhverfanlegt. Sjáum nú að $\mathbf{C}_j \cdot \mathbf{b}_j \neq 0$ því annars hefði lína j í CB bara 0 og þá gæti CB ekki verið andhverfanlegt. Setjum $c_i = \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{b}_j$. Fylkið D , sem er andhverfa B búum við nú til þannig að i -ta lína D verður jöfn $\mathbf{C}_i - (c_i/c_j)\mathbf{C}_j$ þegar $i \neq j$ og j -ta lína D er $(1/c_j)\mathbf{C}_j$.

Liði (a), (b) og (c) hefði líka verið hægt að leysa með því að nota frumfylki. Segjum að frumfylkið E verði til með að framkvæma tiltekna línuaðgerð á einingarfylki. Þegar fylkið A er margfaldað með E frá vinstri þá kemur það sama út og hefði línuaðgerðin verið framkvæmd á A . Frumfylkið E má líka fá fram með því að framkvæma aðgerð á dálka einingarfylkis. Einfaldast er að eiga við línuvíxl og margföldun línu með tölu. Ef E fékkst með því að víxla á línunum i og j í I_n þá má líka fá E með því að víxla á dálkum i og j , og ef E fékkst með því að margfalda línu j í I_n með $r \neq 0$ þá fæst E líka með því að margfalda dálk j í I_n með r . Aðeins flóknara er tilfellið

Þegar E var búið til úr I_n með því að leggja r -falda línu i við línu j . Til að búa E til með dálkaðgerðum á I_n verðum við að leggja r -falda dálk j við línu i . Til dæmis ef $n = 4$ og línaðgerðin var að leggja línu 2 við línu 4 þá er E sama fylki og fæst með að leggja dálk 4 við dálk 2. Ef A væri margfaldað með E fra hægri þá er útkoman sú sama og ef sama aðgerð framkvæmd var á dálkum I_n til að fá E sé framkvæmd á dálkum A . Dæmið væri svo hægt að leysa með því að finna frumfylki E þannig að $B = AE$ og nota svo að $B^{-1} = E^{-1}A^{-1}$.