LÍNULEG ALGEBRA OG RÚMFRÆÐI
1. TVINNTÖLUR.

1.1 Skilgreining. *Tvinntala* (e. complex number) er stæða á forminu $x + yi$ þar sem x og y eru rauntölur. Mengi tvinntalna er táknað með $\mathbf{C}$.

Varúð! Hætta! Sérhver rauntala telst líka vera tvinntala. Við lítum á tvinntöluna $x + 0i$ sem jafna rauntölunni x.

1.2 Skilgreining. Látum $z = x + yi$ og $w = u + vi$ vera tvær tvinntölur.

(i) Summa tvinntalnanna z og w er skilgreind með jöfnunni

$$z + w = (x + yi) + (u + vi) = (x + u) + (y + v)i.$$

(ii) Margfeldi tvinntalnanna z og w er skilgreint út frá reiknireglunni $i^2 = -1$, og því er

$$zw = (x + yi)(u + vi) = (xu - yv) + (xv + yu)i.$$

(iii) Ef $z = x + yi$ þá er *raunhluti* (e. real part) z skilgreindur sem $\operatorname{Re} z = x$ og *þverhluti* (e. imaginary part) z er skilgreindur sem $\operatorname{Im} z = y$. Bæði raun- og þverhluti tvinntölu eru rauntölur.

(iv) Fyrir tvinntölu $z = x + yi$ skilgreinum við *samoka* (e. conjugate) töluna $\overline{z} = \overline{(x + yi)} = x - yi$.

(v) Skilgreinum *lengd* (eða *tölugildi*) tvinntölu $z = x + yi$ sem $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1.3 Reiknireglur. Látum z og w vera tvinntölur.

(i) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

(ii) $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$.

(iii) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.

(iv) $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$.

(v) $z\overline{z} = |z|^2$.

(vi) Margföldunarandhverfa z er talan $1/z = \overline{z}/|z|^2$.

(vii) $\overline{\overline{z}} = z$.

1.4 Skilgreining. Samsömum tvinntöluna $x + yi$ við punktinn (x, y) í planinu $\mathbf{R}^2$. Lengd tvinntölunnar $z = x + yi$ eins og hún er skilgreind hér að ofan er jöfn lengd vigursins (x, y).

Stefnuhorn (e. angle, argument) tvinntölunnar $z = x + yi$ er skilgreint sem hornið sem vigurinn (x, y) í $\mathbf{R}^2$ myndar við x-ásinn. Athugið að stefnuhorn tvinntölu er ekki ótvírætt ákvarðað en munurinn á sérhverjum tveim stefnuhornum sömu tvinntölurnar er heilt margfeldi af 2π.

1.5 Setning. Látum $z = x + yi$ vera tvinntölu með stefnuhorn θ. Setjum $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Þá er

$$x = r\cos\theta \qquad \text{og} \qquad y = r\sin\theta.$$

Ennfremur er

$$\tan\theta = \frac{y}{x}.$$

1.6 Setning. Látum $z = x + yi$ og $w = u + vi$ vera tvær tvinntölur. Látum θ tákna stefnuhorn z og φ táknar stefnuhorn w. Setjum ennfremur $r = |z|$ og $s = |w|$.

Þá er $|zw| = |z|\,|w| = rs$ og stefnuhorn zw er jafnt $\theta + \varphi$.

1.7 Fylgisetning. Látum w vera tvinntölu með lengd r og stefnuhorn θ. Jafnan $z^n = w$ hefur nákvæmlega n ólíkar tvinntölulausnir, lausnirnar hafa allar lengd $r^{1/n}$ og stefnuhornin eru $\varphi = \theta/n + p \cdot (2\pi/n)$ þar sem p tekur gildin $0, 1, \ldots, n-1$.

1.8 Skilgreining. Skilgreinum

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

(Þessi jafna kemur beint út ef notaðar eru veldaraðir fyrir föllin e^x, $\cos x$ og $\sin x$.)

1.9 Fylgisetning. Ef lengd z er r og stefnuhornið er θ þá $z = re^{\theta i}$.
Ef $z = re^{\theta i}$ og $w = se^{\varphi i}$ þá er $zw = (rs)e^{(\theta+\varphi)i}$.

1.10 Fallegasta formúla stærðfræðinnar.

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

1.11 Setning. (Undirstöðusetning algebru, sönnuð af Carl Friedrich Gauss 1799) Látum $q(z) = q_n z^n + q_{n-1} z^{n-1} + \cdots + q_1 z + q_0$ vera margliðu með tvinntalnastuðlum. Jafnan $q(z) = 0$ hefur þá lausn (sem er tvinntala) og hægt er að þátta margliðuna q í 1. stigs þætti.