Línuleg algebra og rúmfræði

19. Hnitaskipti.

19.1 Setning. Látum V og W vera endanlega víð vigurrúm. Látum $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ vera raðgrunn fyrir V og $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ raðgrunn fyrir W. Ritum

$$T(\mathbf{v}_j) = a_{1j}\mathbf{w}_1 + a_{2j}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mj}\mathbf{w}_m,$$

þ.e.a.s. $T(\mathbf{v}_j)_{\mathcal{W}} = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$. Skilgreinum svo $m \times n$ fylkið $A = [a_{ij}]$, þ.e.a.s.

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ T(\mathbf{v}_1)_{\mathcal{W}} & T(\mathbf{v}_2)_{\mathcal{W}} & \cdots & T(\mathbf{v}_n)_{\mathcal{W}} \\ | & | & & | \end{bmatrix},$$

þar sem $T(\mathbf{v}_1)_{\mathcal{W}}, T(\mathbf{v}_2)_{\mathcal{W}}, \dots, T(\mathbf{v}_n)_{\mathcal{W}}$ eru hnitavigrar með tilliti til $\mathcal{W}$.

Ef $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$ og $T(\mathbf{v}) = y_1\mathbf{w}_1 + \cdots + y_m\mathbf{w}_m$ þá er $\mathbf{y} = T(\mathbf{v})_{\mathcal{W}} = A\mathbf{x} = A\mathbf{v}_{\mathcal{V}}$. Fylkið A kallast fylki T með tilliti til grunnanna $\mathcal{V}$ og $\mathcal{W}$.

19.2 Athugasemd. Þegar við höfum vörpun $T : V \to V$ og raðgrunn $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ fyrir V þá tölum við um fylkið

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ T(\mathbf{v}_1)_{\mathcal{B}} & T(\mathbf{v}_2)_{\mathcal{B}} & \cdots & T(\mathbf{v}_n)_{\mathcal{B}} \\ | & | & & | \end{bmatrix},$$

sem fylki T með tilliti til grunnsins $\mathcal{B}$.

19.3 Skilgreining. Látum $\mathcal{E}_n$ tákna venjulega grunninn fyrir $\mathbf{R}^n$, þ.e.a.s. $\mathcal{E}_n = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

19.4 Setning. Látum $\mathcal{B}_{old} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ og $\mathcal{B}_{new} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ vera tvo raðgrunna fyrir vigurrúm V. Skilgreinum fylki P þannig að

$$P = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ (\mathbf{v}_1)_{\mathcal{B}_{old}} & (\mathbf{v}_2)_{\mathcal{B}_{old}} & \cdots & (\mathbf{v}_n)_{\mathcal{B}_{old}} \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

Fyrir sérhvern vigur $\mathbf{v}$ í V gildir að

$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}_{old}} = P\mathbf{v}_{\mathcal{B}_{new}} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_{\mathcal{B}_{new}} = P^{-1}\mathbf{v}_{\mathcal{B}_{old}}.$$

19.5 Setning. Látum $\mathcal{B}_{old} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ og $\mathcal{B}_{new} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ vera tvo raðgrunna fyrir vigurrúm V. Látum $T : V \to V$ vera línulega vörpun. Látum A_{old} vera fylki T með tilliti til grunnsins $\mathcal{B}_{old}$ og A_{new} vera fylki T með tilliti til grunnsins $\mathcal{B}_{new}$. Látum P vera eins og í Setningu 19.4. Þá er

$$A_{new} = P^{-1}A_{old}P.$$

19.6 Setning. Látum $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vera raðgrunn fyrir $\mathbf{R}^n$. Skilgreinum fylkið

$$M_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix},$$

þar sem vigrarnir $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ eru ritaðir með venjulegum hnitum (hnitum með tilliti til grunnsins $\mathcal{E}_n$). Fylkið $M_{\mathcal{B}}$ er hnitaskipta fylkið frá raðgrunninnum $\mathcal{B}$ til raðgrunnsins $\mathcal{E}_n$, og $M_{\mathcal{B}}^{-1}$ er hnitaskiptafylkið frá $\mathcal{E}_n$ til $\mathcal{B}$, þ.e.a.s.

$$\mathbf{v}_{\mathcal{E}_n} = M_{\mathcal{B}}\mathbf{v}_{\mathcal{B}} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}^{-1}\mathbf{v}_{\mathcal{E}_n}.$$

19.7 Setning. Látum $\mathcal{B}_{old} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ og $\mathcal{B}_{new} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ vera tvo raðgrunna fyrir $\mathbf{R}^n$. Skilgreinum fylkið $C_{\mathcal{B}_{old},\mathcal{B}_{new}} = (M_{\mathcal{B}_{new}})^{-1}M_{\mathcal{B}_{old}}$. Þá gildir um sérhvern vigur $\mathbf{v}$ í $\mathbf{R}^n$ að

$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}_{new}} = C_{\mathcal{B}_{old},\mathcal{B}_{new}}\mathbf{v}_{\mathcal{B}_{old}}.$$

19.8 Skilgreining. Látum A og B vera $n \times n$ fylki. Segjum að B sé *ámóta* (e. similar) A ef til er andhverfanlegt fylki P þannig að $B = P^{-1}AP$.

19.9 Skilgreining. **(i)** Látum V vera endanlega vítt vigurrúm. Segjum að vörpun $T : V \to V$ sé *hornalínugeranleg* (e. diagonalizable) ef til er raðgrunnur $\mathcal{B}$ fyrir V þannig að fylki T með tilliti til þessa raðgrunns sé hornalínufylki.

(ii) Segjum að $n \times n$ fylki sé *hornalínugeranlegt* ef það er ámóta einhverju hornalínufylki.