

LÍNULEG ALGEBRA OG RÚMFRÆÐI

14. VIGURRÚM.

14.1 Skilgreining. *Vigurrúm* (yfir rauntölur) er mengi V ásamt reglu til að leggja saman hvaða tvö stök í V sem er og fá út stak í V , og reglu til að margfalda hvaða stak sem er í V með hvaða rauntölu sem er og fá út stak í V . Stökin í V kallast *vigrar*. Summa tveggja vigra \mathbf{v} og \mathbf{w} í V er táknuð $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ og margfeldi $\mathbf{v} \in V$ með rauntölu r er ritað $r\mathbf{v}$. Einnig inniheldur V sérstakan vigur sem kallaður er *núllvigurinn* og er táknaður með $\mathbf{0}$ og fyrir sérhvern vigur \mathbf{v} er til sérstakur vigur sem kallaður er $-\mathbf{v}$.

Til að kallast vigurrúm verða eftirfarandi skilyrði að gilda:

A1	$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$	Tengiregla samlagningar
A2	$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$	Víxlregla samlagningar
A3	$\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$	Núllvigurinn er samlagningarhlutleysa
A4	$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$	Samlagningarandhverfa

Eftirfarandi reglur gilda um margföldun með tölu:

S1	$r(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r\mathbf{u} + r\mathbf{v}$	Dreifiregla
S2	$(r + s)\mathbf{v} = r\mathbf{v} + s\mathbf{v}$	Dreifiregla
S3	$r(s\mathbf{v}) = (rs)\mathbf{v}$	Tengiregla
S4	$1\mathbf{v} = \mathbf{v}$	Margföldunarhlutleysa

14.2 Setning. Látum V vera vigurrúm.

(i) Núllvigurinn $\mathbf{0}$ er eini vigurinn \mathbf{x} sem uppfyllir það að $\mathbf{x} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$ fyrir alla vigra \mathbf{v} í V .

(ii) Fyrir sérhvern vigur \mathbf{v} í V er vigurinn $-\mathbf{v}$ eini vigurinn \mathbf{y} sem uppfyllir það að $\mathbf{v} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$.

(iii) Ef $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ fyrir vigra \mathbf{u} , \mathbf{v} og \mathbf{w} í V þá er $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

(iv) Fyrir alla vigra \mathbf{v} í V gildir að $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(v) Fyrir allar tölur r gildir að $r\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(vi) Fyrir allar tölur r og alla vigra \mathbf{v} í V gildir að $(-r)\mathbf{v} = r(-\mathbf{v}) = -(r\mathbf{v})$.

14.3 Skilgreining. Segjum að hlutmengi W í V sé *hlutrúm* í V ef W uppfyllir sjálft öll skilyrði þess að kallast vigurrúm þegar notaðar eru sömu aðferðir við samlagningu vigra og margföldun vigurs með tölu og notaðar eru í V .

14.4 Setning. Hlutmengi W í V er hlutrúm í V ef og aðeins ef eftirfarandi þrjú skilyrði eru uppfyllt:

(i) $\mathbf{0} \in W$,

(ii) alltaf þegar $\mathbf{v} \in W$ og $c \in \mathbf{R}$ þá er $c\mathbf{v} \in W$,

(iii) alltaf þegar $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$ þá er $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W$.

14.5 Setning. Mengið $\mathcal{M}_{m \times n}$, mengi allra $m \times n$ fylkja, er vigurrúm þar sem aðgerðirnar eru venjuleg samlagning fylkja og margföldun fylkis með tölu.

Skilgreinum \mathcal{U} sem mengi allra $n \times n$ efri þríhyrningsfylkja, \mathcal{L} sem mengi allra $n \times n$ neðri þríhyrningsfylkja, og \mathcal{D} sem mengi allra $n \times n$ hornalínufylkja. Mengin $\mathcal{U}, \mathcal{L}, \mathcal{D}$ eru allt hlutrúm í $\mathcal{M}_{n \times n}$.

14.6 Skilgreining og setning. Látum \mathcal{I} tákna bil á rauntalnaásnum. Skilgreinum $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ sem mengi allra rauntölugildra falla sem eru skilgreind á \mathcal{I} . Skilgreinum einnig $\mathcal{C}(\mathcal{I})$ sem mengi allra samfelldra falla sem skilgreind eru á \mathcal{I} og $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ skilgreinum við sem mengi allra diffranlegra falla sem eru skilgreind á \mathcal{I} .

Mengið $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ ásamt venjulegri samlagningu falla er vigurrúm og $\mathcal{C}(\mathcal{I})$ og $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ eru hlutrúm í $\mathcal{F}(\mathcal{I})$.

Athugasemd. Núllvigurinn í $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ er núllfallið $\mathbf{0}$ sem er skilgreint á \mathcal{I} þannig að $\mathbf{0}(x) = 0$ fyrir öll x í \mathcal{I} .

14.7 Skilgreining. Látum V vera vigurrúm og $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$. *Spann* vigranna $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ er skilgreint sem mengið

$$\text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \{c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_k\mathbf{v}_k \mid c_1, \dots, c_k \in \mathbf{R}\}.$$

Við segjum að fjölskylda vigra $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ sé línulega óháð ef $c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ gildir aðeins ef $c_1 = \dots = c_k = 0$. Annars er sagt að vigrarnir séu *línulega háðir*.

Segjum að fjölskyldan $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ í V sé grunnur fyrir V ef

(i) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ spanna V , þ.e.a.s. $V = \text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$,

(ii) fjölskyldan $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ er línulega óháð.

Ennfremur þá segjum við í því tilviki að *vídd* V sé k .

14.8 Skilgreining. Látum V vera vigurrúm. Sagt er að V hafi *endanlega vídd* (e. finite-dimensional) ef til er grunnur fyrir V með endanlega mörgum stökum $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ og vídd V er þá skilgreind sem k . Vigurrúm sem hefur ekki endanleg vídd er sagt hafa *óendanlega vídd* (e. infinite-dimensional).

14.9 Skilgreining. Látum \mathcal{P} tákna mengi allra margliða $a_k t^k + \dots + a_1 t + a_0$. Táknum með \mathcal{P}_k hlutmengi allra margliða af stigi $\leq k$.

14.10 Setning. Mengið \mathcal{P} ásamt venjulegri samlagningu margliða og margföldun margliðu með tölu á venjulegan hátt er vigurrúm. Hlutmengin \mathcal{P}_k eru hlutrúm í \mathcal{P} .

Setjum $f_0(t) = 1$, $f_1(t) = t$, $f_2(t) = t^2$, \dots , $f_k(t) = t^k$. Margliðurnar f_0, f_1, \dots, f_k mynda grunn fyrir \mathcal{P}_k . Vídd \mathcal{P}_k er $k + 1$.

14.11 Skilgreining. Látum V vera vigurrúm. *Innfeldi* (e. inner product) á V er fall sem úthlutar hverju pari (\mathbf{v}, \mathbf{w}) af vigrum í V rauntölu sem táknuð er með $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ þannig að eftirfarandi skilyrði gilda fyrir alla vigra \mathbf{u}, \mathbf{v} og \mathbf{w} í V og allar tölur r :

P1	$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$	Víxlregla
P2	$\langle \mathbf{u}, (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$	Dreifiregla
P3	$r\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle (r\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, (r\mathbf{w}) \rangle$	Tengiregla
P4	$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ og $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ ef og aðeins ef $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.	Jákvæðni

Innfeldisrúm (e. inner product space) er vigurrúm V ásamt innfeldi.