Línuleg algebra og rúmfræði

13. Fjögur undirstöðu hlutrúm.

13.1 Skilgreining (upprifjun). Látum A vera $m \times n$ fylki. Táknum línuvigra A með $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m \in \mathbf{R}^n$ og dálkvigra A táknum við með $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbf{R}^m$.

Skilgreinum *dálkrúm* (e. column space) A sem hlutrúmið í $\mathbf{R}^m$ sem er spannað af dálkvigrum A, það er að segja

$$C(A) = \mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) \subseteq \mathbf{R}^m.$$

Skilgreinum *línurúm* (e. row space) A sem hlutrúmið í $\mathbf{R}^n$ sem er spannað af línuvigrum A, það er að segja

$$R(A) = \mathrm{Span}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m) \subseteq \mathbf{R}^n.$$

Núllrúm (e. nullspace) A er mengi allra lausna $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, eða á táknmáli

$$N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Hlutrúmið $N(A^T)$ er núllrúm A^T.

13.2 Setning (upprifjun). Látum A vera $m \times n$ fylki. Þá er $N(A) = R(A)^\perp$ og $N(A^T) = C(A)^\perp$.

13.3 Setning. Látum A tákna $m \times n$ fylki. Látum U tákna (eitthvert) efra stallaform A og R rutt efra stallaform A. Látum einnig E vera margfeldi frumfylkja þannig að $EA = U$.

(i) Þær línur í U sem eru ekki bara með 0-um mynda grunn fyrir $R(A)$.

(ii) Vigrarnir sem fást með því að setja eina af frjálsu breytunum sem 1 og hinar sem 0 og reikna lausn á $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mynda grunn fyrir $N(A)$.

(iii) Pinnadálkarnir í upphaflega fylkinu (þeir dálkar í A þar sem verður pinni í U) mynda grunn fyrir $C(A)$.

(iv) Ef k neðstu línurnar í U eru bara með 0-um þá gefa k neðstu línurnar í E okkur grunn fyrir $N(A^T)$.

13.4 Reikniaðferð. Byrjum með $m \times n$ fylki A. Finna á grunna fyrir línurúmið $R(A)$, dálkrúmið $C(A)$ og núllrúmið $N(A)$.

Skref 1. Notið línuaðgerðir til að breyta A yfir í fylki U á efra stallaformi.

Skref 2. Þær línur U sem innihalda ekki bara 0 eru grunnur fyrir $R(A)$ línurúm A.

Skref 3. Þeir dálkar **upphaflega** fylkisins A þar sem er pinni í U mynda grunn fyrir $C(A)$ dálkrúm A.

Skref 4. Grunnur fyrir núllrúm A finnst með því að nota U (eða rutt efra stallaform A) til að leysa jöfnuhneppið $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Fáum formúlur fyrir lausninni $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sem línulegri samantektum af vigrum þar sem hver stuðull stendur fyrir frjálsa breytu. Vídd núllrúmsins er jöfn fjölda vigra og grunnur finnst með því að skrifa lausnina á forminu

$$\mathbf{x} = r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \cdots + r_k\mathbf{v}_k$$

þar sem $r_1, r_2, \ldots, r_k$ eru stikarnir og $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ eru vigrar í $\mathbf{R}^n$ sem mynda grunn fyrir núllrúmið.

13.5 Setning. Látum A vera $m \times n$ fylki með $\operatorname{rank} A = r$.
(i) $\dim R(A) = \dim C(A) = r$,
(ii) $\dim N(A) = n - r$,
(iii) $\dim N(A^T) = m - r$.

13.6 Skilgreining. Látum A vera $m \times n$ fylki. Víddin á $C(A)$ er oft kölluð *myndvídd* A. Víddin á núllrúminu $N(A)$ er kölluð *núllvídd* (e. nullity) A og táknuð með $\operatorname{null}(A)$.

13.7 Setning. Látum A vera $m \times n$ fylki. Þá er

$$\operatorname{null}(A) + \operatorname{rank}(A) = n.$$

13.8 Reikniaðferð. Byrjum með $m \times n$ fylki A. Finna á $\operatorname{rank}(A)$ og $\operatorname{null}(A)$. Talan $\operatorname{rank}(A)$ er jöfn vídd dálkrúms A og líka jöfn vídd línurúms A.

Skref 1. Notið línuaðgerðir til að breyta A yfir í fylki U á efra stallaformi.

Skref 2. Fjöldi pinna í U er jafn $\operatorname{rank}(A)$ og fjöldi dálka án pinna í U er jafn $\operatorname{null}(A)$. Athugið að $\operatorname{null}(A) = n - \operatorname{rank}(A)$.

13.9 Setning. Látum V vera hlutrúm í $\mathbf{R}^n$. Segjum að $\dim V = k$.
(i) $\dim V^\perp = n - k$,
(ii) Sérhvern vigur úr $\mathbf{R}^n$ má rita á nákvæmlega einn hátt sem summu vigurs úr V og vigurs úr $V^\perp$. Sér í lagi er $V + V^\perp = \mathbf{R}^n$.
(iii) $\left(V^\perp\right)^\perp = V$.

13.10 Setning. Látum A vera $m \times n$ fylki. Þá er
(i) $R(A)^\perp = N(A)$,
(ii) $N(A)^\perp = R(A)$,
(iii) $C(A)^\perp = N(A^T)$,
(iv) $N(A^T)^\perp = C(A)$.

13.11 Setning. Fyrir sérhvern vigur $\mathbf{b}$ í $C(A)$ er til ótvírætt ákvarðaður vigur $\mathbf{x}_0$ í $R(A)$ þannig að $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$.