

LÍNULEG ALGEBRA OG RÚMFRÆÐI

12. GRUNNAR OG VÍDD.

12.1 Skilgreining. Látum V vera hlutrúm í \mathbf{R}^n . Fjölskylda vigra $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ er kölluð *grunnur* (e. basis) fyrir V ef eftirfarandi tvö skilyrði eru uppfyllt:

(i) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ spanna V , það er að segja $V = \text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$;

(ii) fjölskyldan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ er línulega óháð.

Athugið. Vigrar í grunni fyrir hlutrúm V eru alltaf sjálfir í V .

12.2 Setning. Látum V vera hlutrúm í \mathbf{R}^n . Fjölskylda vigra $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ í V er grunnur fyrir V ef og aðeins ef sérhverig vigur $\mathbf{v} \in V$ má rita á nákvæmlega einn hátt sem línulega samantekt af $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$.

12.3 Skilgreining. Látum V vera hlutrúm í \mathbf{R}^n með grunn $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$. Þegar vigur $\mathbf{v} \in V$ er ritaður sem línuleg samantekt $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k$ þá segjum við að c_1, c_2, \dots, c_k séu hnit \mathbf{v} með tilliti til (rað)grunnsins $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$.

Athugasemd. Röð vigranna í grunninum skiptir mál upp á röð hnitanna. Því er talað um *raðgrunn* (e. ordered basis) þegar við viljum að röð vigra í grunni sé fastákveðin.

12.4 Setning. Látum A vera $n \times n$ fylki. Þá er fylkið A andhverfanlegt ef og aðeins ef dálkvigrar A mynda grunn fyrir \mathbf{R}^n .

12.5 Setning. Sérhvert hlutrúm V í \mathbf{R}^n , annað en fáfengilega hlutrumið (e. trivial subspace) $\{0\}$, hefur grunn.

12.6 Setning. Látum V vera hlutrúm í \mathbf{R}^n með grunn $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$. Ef $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_l\}$ er fjölskylda vigra í V og $l > k$ þá er fjölskyldan $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_l\}$ línuleg háð.

12.7 Setning. Látum V vera hlutrúm í \mathbf{R}^n . Sérhverjir tveir grunnar fyrir V innihalda jafnmörg stök.

12.8 Skilgreining. Látum V vera hlutrúm í \mathbf{R}^n . *Vídd* (e. dimension) V er fjöldi staka í grunni fyrir V . Víddin á V er táknuð með $\dim V$.

12.9 Setning. Gerum ráð fyrir að V og W séu hlutrúm í \mathbf{R}^n . Gerum enn fremur ráð fyrir að $W \subseteq V$ og að $\dim V = \dim W$. Þá er $V = W$.

12.10 Setning. Látum V vera k -vitt hlutrúm í \mathbf{R}^n . Þá eru sérhverjir k vigrar sem spanna V línulega óháðir. Einnig gildir að ef við höfum línulega óháða fjölskyldu k vigra í V þá spanna þeir V .

12.11 Setning. Látum V vera l -vitt hlutrúm í \mathbf{R}^n . Látum $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vera línulega óháða fjölskyldu vigra í V . Þá má finna vigra $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_l$ þannig að $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_l\}$ sé grunnur fyrir V .

12.12 Reikniaðferð. Höfum gefna vigra $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ í \mathbf{R}^n og hlutrúm $V = \text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$. Finna á grunn fyrir V .

Skref 1. Búið til $n \times k$ fylki A þannig að vigrarnir $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ séu dálkvigrar A (í þessari röð).

Skref 2. Notið línuaðgerðir til að breyta A yfir í fylki á efra stallaformi.

Skref 3. Athugið í hvaða dálkum eru pinnar. Vigrarnir \mathbf{v}_j þannig að það er pinni í dálk j mynda grunn fyrir V .

12.13 Reikniaðferð. Höfum gefna línulega óháða vigrar $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ í \mathbf{R}^n . Viljum finna grunn fyrir \mathbf{R}^n sem vigrarnir $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ eru hluti af.

Skref 1. Búið til $n \times (k + n)$ fylki A þannig að vigrarnir $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ séu í k fyrstu dálkunum og síðan komi vigrarnir $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{e}_1, \mathbf{v}_{k+2} = \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{v}_{k+n} = \mathbf{e}_n$.

Skref 2. Notið línuaðgerðir til að breyta A yfir í fylki á efra stallaformi.

Skref 3. Athugið í hvaða dálkum eru pinnar. Vigrarnir \mathbf{v}_j þannig að það sé pinni í dálk j mynda grunn fyrir \mathbf{R}^n .