Línuleg algebra og rúmfræði

11. Línulega óháðir vigrar.

11.1 Skilgreining. Látum M tákna mengi. *Fjölskylda* í M með *vísamengi* I er safn staka $\{x_i\}_{i\in I}$ úr M. Athugið að mögulegt er að $x_i = x_j$ þó að $i \neq j$.

Í þessu námskeiði vinnum við aðallega með endanlegar fjölskyldur og þá notum við $\{1, 2, \dots, k\}$ sem vísamengi og ritum fjölskylduna sem $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.

11.2 Setning. Látum $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vera fjölskyldu vigra úr $\mathbf{R}^n$. Setjum svo $V = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$. Sérhvern vigur $\mathbf{v} \in V$ má rita á nákvæmlega einn hátt sem línulega samantekt $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ og aðeins ef eina leiðina til að rita núllvigurinn $\mathbf{0}$ sem línulega samantekt af $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ er $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_k$.

11.3 Skilgreining. Látum $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vera fjölskyldu vigra úr $\mathbf{R}^n$. Ef eina leiðin til að rita núllvigurinn $\mathbf{0}$ sem línulega samantekt

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

er að $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ þá er sagt að fjölskyldan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ sé *línulega óháð*. Ef til eru tölur $c_1, c_2, \dots, c_k$ ekki allar jafnar 0 þannig að

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \tag{1}$$

þá er sagt að vigrarnir séu *línulega háðir* og að jafnan (1) sýni línulegt samband þeirra.

11.4 Aðferðafræði. Þegar á að sanna að gefin fjölskylda vigra $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ sé línulega óháð þá ætti sönnunin (næstum) alltaf að byrja á „Gerum ráð fyrir að $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Viljum sýna að $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$."

11.5 Málnotkun. Það rétta er að segja að fjölskyldan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ sé línulega óháð (eða línulega háð), en þar sem lítil hætta er á misskilningi er oft sagt (og ritað) „vigrarnir $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ eru línulega háðir (eða óháðir)".

11.6 Setning. Gerum ráð fyrir að $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ sé línulega óháð fjölskylda vigra í $\mathbf{R}^n$. Þá er fjölskyldan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}\}$ línulega óháð ef og aðeins ef $\mathbf{v}$ er ekki stak í $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$.

11.7 Reikniaðferð Gefin er fjölskylda $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ af vigrum í $\mathbf{R}^n$. Segja á til um hvort fjölskyldan er línulega óháð eða línulega háð.

Skref 1. Búið til $n \times k$ fylki A þannig að vigrarnir $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ séu dálkvigrar A.

Skref 2. Notið línuaðgerðir til að breyta A yfir í fylki á efra stallaformi.

Skref 3. Ef það er pinni í sérhverjum dálki þá eru vigrarnir $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ **línulega óháðir**, en ef það vantar pinna í einhvern dálkinn þá eru vigrarnir línulega háðir.

Skref 4 (viðbót). Ef teknir eru þeir af upphaflegu vigrunum sem voru í pinnadálkunum þá mynda þeir línulega óháða fjölskyldu vigra.

11.8 Setning Látum $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vera fjölskyldu vigra í $\mathbf{R}^n$. Ef $k > n$ þá er fjölskyldan línulega háð.

11.9 Setning. Látum $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vera fjölskyldu vigra úr $\mathbf{R}^n$. Gerum ráð fyrir að enginn vigranna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ sé núllvigurinn og að ef $i \neq j$ þá sé $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$. Þá er fjölskyldan línulega óháð.

11.10 Setning Látum A vera $m \times n$ fylki með $\mathrm{rank}(A) = n$. Ef $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ er línulega óháð fjölskylda vigra í $\mathbf{R}^n$ þá er fjölskyldan $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_k\}$ í $\mathbf{R}^m$ líka línulega óháð.

1. október 2005 Rögnvaldur G. Möller