LÍNULEG ALGEBRA OG RÚMFRÆÐI

10. HLUTRÚM Í $\mathbf{R}^n$.

10.1 Skilgreining. Hlutmengi W í $\mathbf{R}^n$ er sagt *lokað undir samlagningu* (e. closed under addition) ef um sérhverja tvo vigra $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ gildir að $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ er líka í W.

Einnig er sagt að hlutmengi W í $\mathbf{R}^n$ er sagt *lokað undir margföldun með tölu* (e. closed under scalar multiplication) ef um sérhvern vigur $\mathbf{v} \in W$ og sérhverja tölu r gildir að $r\mathbf{v}$ er í W.

Hlutmengi W í $\mathbf{R}^n$ sem inniheldur núllvigurinn $\mathbf{0}$ og er bæði lokað undir samlagningu og undir margföldun með tölu er kallað *hlutrúm* (e. subspace) í $\mathbf{R}^n$.

10.2 Setning. **(i)** Látum A vera $m \times n$ fylki. Mengi allra lausna fylkjajöfnunnar $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er hlutrúm í $\mathbf{R}^n$.

(ii) Látum $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ vera vigra í $\mathbf{R}^n$. Mengið $\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k)$ er hlutrúm í $\mathbf{R}^n$.

[Hvernig ætti að skilja Span(), spann af engum vigri? Það er eðlilegast að skilgreina $\mathrm{Span}() = \{\mathbf{0}\}$, sem er hlutrúm í $\mathbf{R}^n$.]

10.3 Skilgreining og setning. Látum U og V vera hlutrúm í $\mathbf{R}^n$. Skilgreinum *summu* hlutrúmanna sem mengið

$$U + V = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \text{ fyrir einhverja vigra } \mathbf{u} \in U \text{ og } \mathbf{v} \in V\}.$$

Mengið $U + V$ er hlutrúm í $\mathbf{R}^n$.

10.4 Skilgreining. Látum V vera hlutrúm í $\mathbf{R}^n$. Skilgreinum *hornrétt fyllirúm* (e. orthogonal complement) V sem mengið

$$V^{\perp} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ fyrir alla vigra } \mathbf{v} \in V\}.$$

10.5 Setning. Látum V vera hlutrúm í $\mathbf{R}^n$. Hornrétta fyllirúmið $V^{\perp}$ er hlutrúm í $\mathbf{R}^n$.

10.6 Skilgreining. Látum V og W vera hlutrúm í $\mathbf{R}^n$. Segjum að hlutrúmin V og W séu *hornrétt hvort á annað* (e. orthogonal subspaces) ef um alla vigra $\mathbf{v} \in V$ og $\mathbf{w} \in W$ gildir að $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

10.7 Skilgreining Látum A vera $m \times n$ fylki. Látum $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m \in \mathbf{R}^n$ standa fyrir línuvigra A og dálkvigra A táknum við með $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbf{R}^m$.

Skilgreinum *dálkrúm* (e. column space) A sem hlutrúmið í $\mathbf{R}^m$ sem er spannað af dálkvigrum A, það er að segja

$$C(A) = \mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) \subseteq \mathbf{R}^m.$$

Skilgreinum *línurúm* (e. row space) A sem hlutrúmið í $\mathbf{R}^n$ sem er spannað af línuvigrum A, það er að segja

$$R(A) = \mathrm{Span}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m) \subseteq \mathbf{R}^n.$$

10.8 Setning Látum A vera $m \times n$ fylki. Vigur $\mathbf{b}$ í $\mathbf{R}^m$ er í $C(A)$ ef og aðeins ef jafnan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hefur lausn. Því er

$$C(A) = \{\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ er samkvæm}\}.$$

10.9 Skilgreining. Látum A vera $m \times n$ fylki. *Núllrúm* (e. nullspace) A er mengi allra lausna $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, eða á táknmáli

$$N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

10.10 Setning. Látum A vera $m \times n$ fylki. Þá er $N(A) = R(A)^{\perp}$.

10.11 Setning. Látum A vera $m \times n$ fylki. Þá er $N(A^T) = C(A)^{\perp}$.

10.12 Sönnunaraðferð. Spurt er hvort gefið hlutmengi M í $\mathbf{R}^n$ er hlutrúm. Athugið þrjár spurningar:

Spurning 1. Er $\mathbf{0} \in M$?

Spurning 2. Ef $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ eru vigrar í M er þá $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ alltaf líka í M?

Spurning 3. Ef r er tala og $\mathbf{x}$ er vigur í M er þá $r\mathbf{x}$ alltaf líka í M?

Ef svarið við öllum þrem spurningunum er „já“ þá er mengið hlutrúm, en ef svar við einhverri spurningu er „nei“ þá er mengið ekki hlutrúm.