Háskóli Íslands
Raunvísindadeild

Föstudagur 17. desember 2004
kl. 13:30–16:30

09.10.14 Línuleg algebra og rúmfræði

Í prófinu eru tíu dæmi sem öll vega jafnt.
Engin skrifleg hjálpargögn eru leyfð. Ekki er leyfilegt að nota reiknivélar.
Skilið úrlausnum hreinrituðum í prófbókina. Ef taka á tillit til útreikninga á rissblöðum þarf að merkja slík blöð sérstaklega. Rökstyðja þarf allar fullyrðingar. Að sjálfsögðu megið þið nota þekktar setningar, en það þarf að koma greinilega fram hvaða niðurstöður þið eruð að nota. Órökstudd svör gefa engin stig.

Dæmi 1.

Finnið allar lausnir á jöfnuhneppinu

$$\begin{aligned} x_1 \qquad -2x_3 +x_4 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 9x_1 - 3x_2 - x_3 - 7x_4 &= 4. \end{aligned}$$

Dæmi 2.

Reiknið andhverfu fylkisins

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dæmi 3.

Finnið grunn fyrir hlutrúmið

$$V = \mathrm{Span}((1,3,5,7),(2,0,4,2),(3,2,8,7))$$

í $\mathbf{R}^4$.

Dæmi 4.

(i) Er mengið $M_1 = \{(2x, 2x+y, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ hlutrúm í $\mathbf{R}^3$?
(ii) Látum $n \geq 2$. Er mengið $M_2 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R} \text{ og } x_2 = 1\}$ hlutrúm í $\mathbf{R}^n$?

Dæmi 5.

Fjölskyldan $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ er grunnur fyrir $\mathbf{R}^3$.
(i) Finnið hnit vigursins $(3,2,-3)$ miðað við grunninn $\mathcal{B}$.
(ii) Línuleg vörpun $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ hefur fylkið

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

miðað við grunninn $\mathcal{B}$. Finnið venjulega fylkið fyrir T.

Dæmi 6.

Finnið þverstaðlaðan grunn fyrir hlutrúmið V í $\mathbf{R}^3$ sem gefið er með jöfnunni $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$.

Dæmi 7.

Látum A og B vera 3×3 fylki. Gefið er að $\det(A) = 4$ og $\det(B) = 5$.
(i) Reiknið ákveður fylkjanna $3A, AB$ og $A^{-1}B^3$.
(ii) Er mögulegt að talan 0 sé eigingildi B?
(iii) Er mögulegt að fylkið A hafi eigingildi $1, -1, 2$?

Dæmi 8.

Setjum

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finnið þverstaðlað fylki Q þannig að $Q^{-1}AQ$ er hornalínufylki.

Dæmi 9.

Látum $a_0 = 2$ og $a_1 = 1$ og skilgreinum svo $a_k = 6a_{k-1} + a_{k-2}$ fyrir $k \geq 2$. Finnið almenna formúlu fyrir a_k.

Dæmi 10.

Um 3×3 fylki A er vitað

a. $A\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$

b. $A^T\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$

c. $\operatorname{rank}(A) = 1.$

Finnið A.

Gleðileg jól og farsælt komandi ár!

Rögnvaldur G. Möller