

09.10.14 Línuleg algebra og rúmfræði

Í prófinu eru tíu dæmi sem öll vega jafnt.

Engin skrifleg hjálpargögn eru leyfð. Ekki er leyfilegt að nota reiknivélar.

Skilið úrlausnum hreinrituðum í prófbókina. Ef taka á tillit til útreikninga á rissblöðum þarf að merkja slík blöð sérstaklega. Rökstyðja þarf allar fullyrðingar. Að sjálfsgöðu megið þið nota þekktar setningar, en það þarf að koma greinilega fram hvaða niðurstöður þið eruð að nota. Órökstudd svör gefa engin stig.

Dæmi 1.

Finnið þá viga í \mathbf{R}^4 sem eru hornréttir á alla vigrana $[1, 2, 3, 4]$, $[4, 3, 2, 1]$ og $[1, 1, 1, 1]$.

Dæmi 2.

Finnið grunna fyrir línu- og dálkrúm fylkisins

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Dæmi 3.

Um línulega vörpun $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ er vitað að $T([1, 1]) = [2, 3]$ og $T([1, -1]) = [0, 1]$.

(i) Reiknið $T([2, 3])$.

(ii) Finnið fylki T .

Dæmi 4.

(i) Skilgreinum vörpun $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ þannig að $T([x_1, x_2, x_3]) = x_1 + x_2 + x_3$. Er vörpunin T línuleg? (Rökstuðningur nauðsynlegur.)

(ii) Setjum $W = \{[x_1, x_2] \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 x_2 = 0\}$. Er W hlutrúm í \mathbf{R}^2 ? (Rökstuðningur nauðsynlegur.)

Dæmi 5.

(i) Línan l_1 hefur vigurjöfnu $[1, 2, 3] + t[1, 1, 1]$ og línan l_2 hefur vigurjöfnu $[3, 2, 1] + s[1, 1, 2]$. Skerast þessar línur?

(ii) Finnið skurðpunkt línunnar l_3 sem hefur vigurjöfnu $[1, 1, 0] + t[1, 2, 1]$ og plansins sem hefur jöfnu $x + 2y + z = 6$.

Dæmi 6. Línuleg vörpun $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ hefur fylkið

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Látum K vera kassann í \mathbf{R}^3 sem gefinn er með ójöfnunum

$$-1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 5, \quad 1 \leq z \leq 2.$$

Finnið rúmmál myndar K undir T .

Dæmi 7.

Skilgreinum

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finnið eigingild og eiginviga A . Er fylkið A hornalínugeranlegt? (Rökstyðjið.)

Dæmi 8.

(i) Finnið ofanvarpsfylkið fyrir hlutrúmið W í \mathbf{R}^3 sem spannað er af vigrinu $[1, 2, 3]$.

(ii) Hvert er ofanvarp vigursins $[4, 1, 3]$ á hlutrúmið sem vigrarnir $[1, 0, 1]$ og $[2, 0, 1]$ spanna?

Dæmi 9. Setjum

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Reiknið A^{100} .

Dæmi 10.

Setjum $\mathbf{u} = [i, 1 + i]$ og $\mathbf{v} = [2, 3 + i]$.

(i) Reiknið $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

(ii) Finnið þá viga \mathbf{C}^2 sem eru hornréttir á \mathbf{u} .