Línuleg algebra og rúmfræði

Lausnir sumarprófs 2003

Dæmi 1.

Finnið þá vigra í $\mathbf{R}^4$ sem eru hornréttir á alla vigrana $[1,2,3,4]$, $[4,3,2,1]$ og $[1,1,1,1]$.

Lausn. Það að $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ sé hornréttur á þessa þrjá gefnu vigra segir nákvæmlega að $\mathbf{x}$ sé lausn á jöfnuhneppinu

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Lausnir jöfnuhneppisins eru

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = r[1,-2,1,0] + s[2,-3,0,1].$$

Dæmi 2.

Finnið grunna fyrir línu- og dálkrúm fylkisins

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Lausn. Notum línuaðgerðir til að koma fylkinu A yfir á efra stallaform. Efra stallformið sem ég fékk er

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Þær línur sem eru ekki bara með núllum í efra stallaformi mynda grunn fyrir línurúmið, svo $[1,1,1,1]$ og $[0,0,1,2]$ mynda grunn fyrir línurúmið. Það eru vendistuðlar í 1. og 3. dálk svo 1. og 3. dálkur úr upphaflega fylkinu mynda grunn fyrir dálkrúmið.

Dæmi 3.

Um línulega vörpun $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ er vitað að $T([1,1]) = [2,3]$ og $T([1,-1]) = [0,1]$.

(i) Reiknið $T([2,3])$.

(ii) Finnið fylki T.

Lausn. **(i)** Nú er $[2,3] = \frac{5}{2}[1,1] - \frac{1}{2}[1,-1]$ svo

$$T([2,3]) = T(\tfrac{5}{2}[1,1] - \tfrac{1}{2}[1,-1]) = \tfrac{5}{2}T([1,1]) - \tfrac{1}{2}T([1,-1]) = [5,7].$$

(ii) Til að finna fylkið þarf að reikna $T(\mathbf{e}_1)$ og $T(\mathbf{e}_2)$. Reiknum út að

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}[1,1] + \frac{1}{2}[1,-1] \qquad \text{og } \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}[1,1] - \frac{1}{2}[1,-1].$$

Fáum að $T(\mathbf{e}_1) = [1, 2]$ og $T(\mathbf{e}_2) = [1, 1]$. Fylkið er

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dæmi 4.

(i) Skilgreinum vörpun $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ þannig að $T([x_1, x_2, x_3]) = x_1 + x_2 + x_3$. Er vörpunin T línuleg? (Rökstuðningur nauðsynlegur.)

(ii) Setjum $W = \{[x_1, x_2] \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 x_2 = 0\}$. Er W hlutrúm í $\mathbf{R}^2$? (Rökstuðningur nauðsynlegur.)

Lausn. **(i)** Látum A vera 1×3 fylkið $[1\ 1\ 1]$. Sjáum að $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ og því er T línuleg vörpun.

(ii) Mengið W er ekki hlutrúm í $\mathbf{R}^2$. Vigrarnir $\mathbf{u} = [1, 0]$ og $\mathbf{v} = [0, 1]$ eru báðir í W en summa þeirra $\mathbf{u} + \mathbf{v} = [1, 1]$ er ekki í W.

Dæmi 5.

(i) Línan l_1 hefur vigurjöfnu $[1, 2, 3] + t[1, 1, 1]$ og línan l_2 hefur vigurjöfnu $[3, 2, 1] + s[1, 1, 2]$. Skerast þessar línur?

(ii) Finnið skurðpunkt línunnar l_3 sem hefur vigurjöfnu $[1, 1, 0] + t[1, 2, 1]$ og planssins sem hefur jöfnu $x + 2y + z = 6$.

Lausn. **(i)** Leitum að tölum s og t þannig að $[1, 2, 3] + t[1, 1, 1] = [3, 2, 1] + s[1, 1, 2]$. Setjið upp jöfnuhneppi og reynið að leysa. Þið komist fljótt að því að enginlausn er til og því skerast línurnar ekki.

(ii) Um punkt (x, y, z) á línunni gildir að

$$x = 1 + t, \qquad y = 1 + 2t \qquad z = t.$$

Um punkta á planinu gildir að $x + 2y + z = 6$. Setjum inn í þessa jöfnu og fáum að

$$(1 + t) + 2(1 + 2t) + t = 6,$$

sem gefur $t = \frac{1}{2}$. Skurðpunkturinn er $[\frac{3}{2}, 2, \frac{1}{2}]$.

Dæmi 6. Línuleg vörpun $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ hefur fylkið

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Látum K vera kassann í $\mathbf{R}^3$ sem gefinn er með ójöfnunum

$$-1 \le x \le 2, \qquad 0 \le y \le 5, \qquad 1 \le z \le 2.$$

Finnið rúmmál myndar K undir T.

Lausn. Rummál myndarinn er $|\det(A)|$(Rúmmál K). Nú er $\det(A) = -3$ og rúmmál K er 15, so rúmmál myndarinnar er 45.

Dæmi 7.

Skilgreinum

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finnið eigingild og eiginvigra A. Er fylkið A hornalínugeranlegt? (Rökstyðjið.)

Lausn. Auðvellt er að reikna út að eigingildin eru $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ og $\lambda_3 = 3$. Eiginvigrar fyrir $\lambda_1 = 1$ eru vigrar á forminu $r[0,0,1]$, $r \neq 0$, fyrir $\lambda_2 = 2$ eru vigrar á forminu $r[0,1,2]$, $r \neq 0$ eiginvigrar, og fyrir $\lambda_3 = 3$ eru eiginvigrar á forminu $r[1,0,0]$, $r \neq 0$. Fylkið er hornalínugeranlegt, því ef við tökum einn eiginvigur fyrir hvert eigingildi þá fáum við grunn fyrir $\mathbf{R}^3$. (Einnig hefði mátt vitna til setningar sem segir að $n \times n$ fylki með n ólík eigingildi er alltaf hornalínugeranlegt.)

Dæmi 8.

(i) Finnið ofanvarpsfylkið fyrir hlutrúmið W í $\mathbf{R}^3$ sem spannað er af vigrinu $[1,2,3]$.

(ii) Hvert er ofanvarp vigursins $[4,1,3]$ á hlutrúmið sem vigrarnir $[1,0,1]$ og $[2,0,1]$ spanna?

Lausn. **(i)** Aðferðin við þetta er að finna ofanvarpsfylki á hlutrúm W er að taka grunn $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ fyrir W, stilla upp fylki A sem hefur vigrana $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ sem dálka og reikna svo $P = A(A^T A)^{-1} A^t$. Hér fæst

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \left([1\ 2\ 3] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} [1\ 2\ 3] = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

(ii) Setjum $W = \mathrm{sp}([1,0,1],[2,0,1])$. Vigurinn $[0,1,0]$ er hornréttur á bæði $[1,0,1]$ og $[2,0,1]$. Því er $[1,0,1],[2,0,1],[0,1,0]$ grunnur fyrir $\mathbf{R}^3$ og

$$[4,1,3] = 2[1,0,1] + [2,0,1] + [0,1,0].$$

Ofanvarpið á W er $2[1,0,1] + [2,0,1] = [4,0,3]$.

Dæmi 9. Setjum

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Reiknið A^{100}.

Lausn. Hornalínugerum A. Ef C er fylki þannig að $D = C^{-1}AC$ er hornalínufylki þá er $A^k = CD^{100}C^{-1}$. Í þessu dæmi hefur A eigingildin $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$. Eiginvigur fyrir $\lambda_1 = 1$ er $\mathbf{v}_1 = [1,1]$ og eiginvigur fyrir $\lambda_2 = 2$ er $\mathbf{v}_1 = [0,1]$. Því er

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Svo er

$$A^{100} = CD^{100}C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - 2^{100} & 2^{100} \end{bmatrix}.$$

Dæmi 10.

Setjum $\mathbf{u} = [i, 1+i]$ og $\mathbf{v} = [2, 3+i]$.
(i) Reiknið $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
(ii) Finnið þá vigra $\mathbf{C}^2$ sem eru hornréttir á $\mathbf{u}$.

Lausn. **(i)**

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle [i, 1+i], [2, 3+i] \rangle = \bar{i} \cdot 2 + (\overline{1+i})(3+i) = 4 - 4i.$$

(ii) Ritum $\mathbf{z} = [z_1, z_2]$. Vigurinn $\mathbf{z}$ er hornréttur á $\mathbf{u}$ ef og aðeins ef $\langle \mathbf{u}, \mathbf{z} \rangle = 0$. Þegar sett er inn í þessa jöfnu fæst $-iz_1 + (1-i)z_2 = 0$, eða $z_1 = -(1+i)z_2$. Ef við meðhöndlum z_2 sem frjálsa breytu fæst að þeir vigrar sem eru hornréttir á $\mathbf{u}$ eru nákvæmlega vigrarnir $r[-(1+i), 1]$.

Rögnvaldur G. Möller