

09.10.14 Línuleg algebra og rúmfræði

Í prófinu eru tíu dæmi sem öll vega jafnt.

Engin skrifleg hjálpargögn eru leyfð, nema Ensk-íslensk stærðfræðiorðaskrá. Ekki er leyfilegt að nota reiknivélar.

Skilið úrlausnum hreinrituðum í prófbókina. Ef taka á tillit til útreikninga á rissblöðum þarf að merkja slík blöð sérstaklega. Rökstyðja þarf allar fullyrðingar. Að sjálfsgöðu megið þið nota þekktar setningar, en það þarf að koma greinilega fram hvaða niðurstöður þið eruð að nota. Órökstudd svör gefa engin stig.

Dæmi 1.

Látum \mathbf{x} og \mathbf{y} vera vigra í \mathbf{R}^3 . Um vigrana \mathbf{x} og \mathbf{y} er vitað að $\|\mathbf{x}\| = 2$, $\|\mathbf{y}\| = 1$ og ef θ táknar hornið á milli \mathbf{x} og \mathbf{y} þá er $\cos \theta = \frac{1}{4}$. Sýnið að vigrarnir $\mathbf{x} - 3\mathbf{y}$ og $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ eru hornréttir hvor á annan.

Dæmi 2.

Finnið grunn fyrir hlutrúmið í \mathbf{R}^4 sem vigrarnir $[1, 1, 1, 1]$, $[1, 0, 2, 1]$, $[3, 2, 4, 3]$ og $[1, 2, 0, 2]$ spanna. Hver er vídd hlutrúmsins?

Dæmi 3.

Liðirnir í þessu dæmi eru óháðir hvor öðrum.

(i) Skilgreinum vörpun $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ þannig að $T([x_1, x_2, x_3]) = [x_1, \cos(x_2) + x_3]$. Er vörpunin T línuleg? (Rökstuðningur nauðsynlegur.)

(ii) Setjum $W = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 = x_3 \text{ og } x_2 = -x_3\}$. Er W hlutrúm í \mathbf{R}^4 ? (Rökstuðningur nauðsynlegur.)

Dæmi 4.

Liðirnir í þessu dæmi eru óháðir hvor öðrum.

(i) Látum A vera 4×4 fylki þannig að $\det(A) = 3$. Reiknið $\det(A^{-1})$ og $\det(2A)$.

(ii) Setjum

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Reiknið $\det(A)$.

Dæmi 5.

Látum W tákna planið sem hefur jöfnu $x + 2y + 3z = 0$. Látum B vera raðgrunninn $([-2, 1, 0], [-3, 0, 1], [1, 2, 3])$ fyrir \mathbf{R}^3 . (Athugið að hægt er að leysa lið (ii) án þess að hafa leyst (i).)

(i) Finnið fylki ofanvarpsins á W með tilliti til grunnsins B .

(ii) Reiknið fylki ofanvarpsins á W með tilliti til venjulega grunnsins fyrir \mathbf{R}^4 .

Dæmi 6.

Finnið þverstaðlaðan grunn fyrir planið $x + 2y + 3z = 0$ (sama plan og í Dæmi 5).

Dæmi 7.

Látum $B = ([1, 0, 0], [1, 1, 0], [1, 1, 1])$ og $B' = ([1, 1, 1], [0, 1, 1], [0, 0, 1])$ vera tvo raðgrunna fyrir \mathbf{R}^3 .

(i) Finnið hnit vigursins $\mathbf{v} = [1, 2, 1]$ með tilliti til raðgrunnsins B .

(ii) Finnið hnitaskiptafylkið $C_{B,B'}$ frá B -hnitum yfir í B' -hnit.

Dæmi 8.

Leysið diffurjöfnuhneppið

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + 3x_2 \\x'_2 &= 3x_1 + x_2 \\x'_3 &= 5x_3.\end{aligned}$$

Dæmi 9.

Setjið tölur í þriðja dálkinn á eftirfarandi fylki svo úr verði þverstaðlað fylki,

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & * \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & * \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & * \end{bmatrix}.$$

Eru fleiri en ein möguleg lausn?

Dæmi 10.

Leysið eftirfarandi jöfnuhneppi

$$\begin{aligned}z_1 + (2 + i)z_2 + iz_3 &= 1 + i \\-iz_1 + z_2 + (2 + i)z_3 &= 1 - i \\2z_1 + (4 + 4i)z_2 + (1 + 3i)z_3 &= 2 + 2i.\end{aligned}$$