

Stærðfræðigreining IV B

Ábendingar um lausnir vegna prófs 12. maí 2009

- 1) Látum $f(x)$ vera 2π -lotubundið fall sem er gefið á bilinu $-\pi < x < \pi$ með

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ef } -\pi < x < 0 \\ \sin x & \text{ef } 0 < x < \pi \end{cases}$$

- (i) Sýnið að

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^2 - 1} \cos nx$$

þar sem röðin er samleitin í jöfnum mæli fyrir $-\infty < x < \infty$. (Þekktar setningar má nota án sönnunar.)

- (ii) Reiknið gildi summanna

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4m^2 - 1}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(4m^2 - 1)^2}.$$

Ábending á lausn

(i) Mistök hjá mörgum voru að halda því fram að $f(x)$ væri jafnstætt (sumir sögðu jafnvel oddstætt). Fallið er hvorki jafnstætt né oddstætt og því þarf að reikna bæði a_n og b_n . Reyndar er $b_n = 0$ nema þegar $n = 1$. Þeir sem töldu $f(x)$ vera jafnstætt gátu ekki útskýrt liðinn $\frac{1}{2} \sin x$ í röðinni.

Heildið

$$\int \sin x \cos nx \, dx$$

sem kemur fram má reikna með hlutheildun (tvisvar í röð) eða með því að skrifa

$$\sin x \cos nx = \frac{1}{2} \sin(n+1)x - \frac{1}{2} \sin(n-1)x$$

(svipuð heildi komu fram í fyrirlestrunum og dæmatímunum). Að lokum þarf að geta að $f(x)$ er í flokknunum $PC^1 \cap C$ og því er röðin samleitin í jöfnum mæli.

- (ii) Fyrir fyrri röð má láta $x = 0$. Fyrir þá seinni er formúlu Parsevals beitt.

- 2) (i) Athugið eigingildisverkefnið (verkefni A) fyrir diffurvirkjann $Lu = -\frac{d^2 u}{dx^2}$

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = \lambda u, \quad 0 < x < \pi$$

$$u(0) = 0, \quad u'(\pi) - ku(\pi) = 0$$

þar sem $k > 0$ er fasti. Sýnið að ef $k > 1/\pi$ sé til nákvæmlega eitt strangt neikvætt eigingildi $-\beta_0^2$ (reynið þó ekki að ákvarða β_0). Finnið eiginfallið. Sýnið, hins vegar, að ekkert neikvætt eigingildi er til ef $0 < k \leq 1/\pi$.

(ii) Látum $Q(u) = \langle Lu, u \rangle / \langle u, u \rangle$ vera Rayleigh-kvótann fyrir verkefni A. Látum $Q_1(u)$ vera Rayleigh-kvótann fyrir nýtt verkefni (verkefni B) sem er eins og verkefni A að öllu leyti nema það að diffurvirkinn er

$$L_1(u) = -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right)$$

þar sem $p(x)$ er diffranlegt fall á bilinu $0 < x < \pi$, minnkandi fall með $p(\pi) = 1$. Sýnið að $Q_1(u) \geq Q(u)$ fyrir öll C^2 föll u á bilinu $0 < x < \pi$, fyrir utan $u = 0$, sem uppfylla jaðarskilyrðin.

(iii) Ef $0 < k \leq 1/\pi$ sýnið að verkefni B hefur engin neikvæð eigingildi.

Ábending á lausn

(i) Setjum strax $\lambda = -\beta^2$ til að skoða neikvæð eigingildi. Almenn lausn er $A \cosh \beta x + B \sinh \beta x$ og auðvelt að finna jöfnu fyrir eigingildi á forminu

$$\tanh \beta \pi = \frac{1}{k} \beta.$$

Með því að gera skissu af gröfunum $\tanh \pi \beta$ og $\frac{1}{k} \beta$ á móti β sést að þau skerast í bilinu $0 < \beta < \infty$ ef og aðeins ef $k > 1/\pi$ (bið velvirðingar á villu í upphaflega dæminu). Eiginfallið er $\sinh \beta_0 x$ þar sem β_0 er β -hnit skurðpunktsins.

(ii) Stuttur útreikningur með hlutheildun gefur niðurstöðuna (en það þarf að nota jaðarskilyrðin).

(iii) Lægsta eigingildi verkefnis er alltaf lággildi Rayleigh-kvóta þess (miðað við öll föll sem uppfylla jaðarskilyrðin). Ef $0 < k < 1/\pi$ þá hefur verkefni A engin neikvæð eigingildi. Þá er $Q(u) \geq 0$ fyrir öll u sem uppfylla jaðarskilyrðin og þar af leiðandi (samkvæmt lið (ii)) gildir líka $Q_1(u) \geq 0$ og því hefur verkefni B engin neikvæð eigingildi.

3) Athugið bylgjujöfnuna í einni vídd

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

á óendanlegri línu $-\infty < x < \infty$ með upphafsskilyrðum

$$u(x, 0) = e^{-x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

(i) Reiknið út formúlu fyrir lausnina og táknið hana með skekkujufallinu *ef á við*.

(ii) Sýnið að $u(x, t)$ stefni á markgildi þegar x er haldið föstu og $t \rightarrow \infty$. Reiknið það út.

(iii) Endurtakið (i) og (ii) en með upphafsskilyrðunum

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = e^{-x^2}.$$

Ábending á lausn

(i) Formula d'Alemberts gefur

$$u(x, t) = \frac{1}{2}e^{-(x-ct)^2} + \frac{1}{2}e^{-(x+ct)^2}$$

og því

(ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$.

(iii) Aftur er d'Alembert notuð og gefur

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{4c} (\operatorname{erf}(x + ct) - \operatorname{erf}(x - ct))$$

Nú er

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2c} \operatorname{erf}(\infty) = \frac{\sqrt{\pi}}{2c}.$$

Athugið að skekkjufallið er oddstætt og $\operatorname{erf}(\infty) = 1$.

4) (i) Verkfræðingur hefur leyst hitajöfnuna á bilinu $0 < x < \pi$ með upphafskilyrði $u(x, 0) = x(\pi - x)$ gráður. Á endunum voru höfð skilyrðin $u(0, t) = t/4$ gráður og $u(\pi, t) = 1 - e^{-t}$ gráður. Hann reiknaði út að $u(\pi/2, 10) = 3$ gráður. Hann sér næstum strax að þetta geti ekki staðist. Hvernig?

(ii) Eðlisfræðingur er að reikna út rafstöðuspennu í kúlu með radíus 1 metra sem er staðsett þannig að miðja hennar er í upphafspunkti hnitakerfis. Spennan á yfirborðinu er $u(x, y, z) = z(1 - x^2 - y^2)$ volt. Verkefnið jafngildir að leysa $\Delta u = 0$ í einingarkúlunni með gefnu gildi á yfirborðinu. Án þess að leysa Laplace-jöfnuna getur hún reiknað út (a) hágildi u í kúlunni, (b) lággildi u í kúlunni, og (c) gildi u í miðpunkti kúlunnar. Hvernig gerir hún þetta og hver eru gildin?

Ábending á lausn

(i) Gildið $u(\pi/2, 10) = 3$ samræmist ekki hágildislögmálinu fyrir hitajöfnuna. Það síðastnefnda er stærðfræðileg setning sem hefur í för með sér hér að $u(\pi/2, 10)$ getur ekki verið hærra en hágildi $u(x, t)$ á sammengi stríkanna þriggja: $x = 0, 0 \leq t \leq 10$; $x = \pi, 0 \leq t \leq 10$; $t = 0, 0 \leq x \leq \pi$. Hágildi á stríkunum þremur er 2,5 og næst á því fyrsta í punktinum $(0, 10)$. (Þarf að vita að π^2 er örlítið undir 10.) Margir báru gildið 3 saman við gildi í punktinum $(0, 10)$ og $(\pi, 10)$ eingöngu. Aðrir bættu við gildi í $(\pi/2, 0)$. Það dugir ekki.

(ii) Hágildislögmál fyrir þýð föll gefur að hágildi og lággildi $u(x, y, z)$ í kúlunni næst á yfirborði kúlunnar. Meðalgildislögmálið gefur að gildið $u(0, 0, 0)$ er jafnt meðalgildi u á yfirborðinu. Svörin eru 1, -1, 0. Það gekk ekki að reikna gildið $u(0, 0, 0)$ með því eingöngu að setja $x = y = z = 0$ í fallið $z(1 - x^2 - y^2)$ þó að svarið sé rétt.

5) Leysið bylgjujöfnuna

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$$

í skifunni $D = \{(x, y) : r < a\}$ með jaðarskilyrði $u = 0$ fyrir $r = a$ og upphafsgildi

$$u = a - r, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{þegar } t = 0.$$

Ef þið kjósið að skrifa lausnina sem röð eigið þið að gefa skýra formúlu fyrir stuðlana, en þið þurfið ekki að reikna stuðlana út.

Ábending á lausn

Ábending á lausnin er gefin með röð af eiginsveiflum. Þar sem upphafsgildi er fall af r eingöngu nægir að nota einungis eiginsveiflur sem eru fall af r eingöngu (auk t). Þetta gefur (hér notum við formúlublaðið til að finna hringsamhverf eiginföll Laplace virkjans í skífu)

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} J_0(\beta_j r) (A_j \cos(\beta_j ct) + B_j \sin(\beta_j ct))$$

þar sem $\beta_1, \beta_2 \dots$ uppfylla $J_0(\beta_j a) = 0$. Upphafsgildin gefa $B_j = 0$ og

$$A_j = \frac{\int_0^a (a-r) J_0(\beta_j r) r dr}{\int_0^a [J_0(\beta_j r)]^2 r dr}$$

(ekki má gleyma þættinum r fyrir framan dr).

- 6) Leysið Dirichlet verkefnið $\Delta u = 0$ í svæðinu *utan einingarkúlunnar*, þ.e. í svæðinu $r > 1$ í þrívíðu rúmi, með gildi $u = \cos^3 \theta$ á yfirborðinu og þannig að lausnin stefni á 0 þegar $r \rightarrow \infty$. Ath: θ er hjábreidd, $\cos \theta = z/r$, $0 < \theta < \pi$.

Ábending á lausn

Skrifum $\cos^3 \theta = t^3$ sem línulega samantekt af Legendre margliðum $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$. (Ekki er þörf á flóknari kúluföllum með $m \neq 0$ því jaðargildi eru ekki háð lengdargráðu ϕ .) Þetta er auðvelt með hjálp formúlublaðsins:

$$t^3 = \frac{2}{5} P_3(t) + \frac{3}{5} P_1(t).$$

Lausn á Dirichlet verkefni *utan kúlunnar* $r < 1$ fæst með hjálp formúlu á formúlublaðinu neðarlega á síðu 2 og er því

$$\frac{2}{5} r^{-4} P_3(\cos \theta) + \frac{3}{5} r^{-2} P_1(\cos \theta)$$

Einungis neikvæð veldi á r koma fram til að halda lausninni í skefjum þegar $r \rightarrow \infty$.