

# LAUSNIR Á NOKKRUM ÆFINGARDÆMUM

## 2.2 Línulegar jöfnur með fastastuðla

**2.2.2.** g) Kennimargliðan er  $P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 5$  og greinilegt er að  $\lambda = 1$  er núllstöð hennar. Margliðudeiling gefur síðan

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = (\lambda - 1)(\lambda + 1 - 2i)(\lambda + 1 + 2i),$$

svo núllstöðvarnar eru  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1 + 2i$  og  $\lambda_3 = -1 - 2i$ . Við skrifum lausnina sem  $u(t) = v(t-1)$  þar sem fallið  $v$  er lausn á óhliðruðu jöfnunni, en uppfyllir hliðstæð upphafsskilyrði og  $u$  í punktinum  $t = 0$ . Þá er

$$v(t) = Ae^t + Be^{-t} \cos 2t + Ce^{-t} \sin 2t.$$

Nú þurfum við að setja inn upphafsskilyrðin og notum til þess

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt}(e^{-t} \cos 2t) \right|_{t=0} &= -e^{-t} \cos 2t - 2e^{-t} \sin 2t \Big|_{t=0} = -1, \\ \left. \frac{d^2}{dt^2}(e^{-t} \cos 2t) \right|_{t=0} &= e^{-t} \cos 2t + 4e^{-t} \sin 2t - 4e^{-t} \cos 2t \Big|_{t=0} = -3, \\ \left. \frac{d}{dt}(e^{-t} \sin 2t) \right|_{t=0} &= -e^{-t} \sin 2t + 2e^{-t} \cos 2t \Big|_{t=0} = 2, \\ \left. \frac{d^2}{dt^2}(e^{-t} \sin 2t) \right|_{t=0} &= e^{-t} \sin 2t - 4e^{-t} \cos 2t - 4e^{-t} \sin 2t \Big|_{t=0} = -4. \end{aligned}$$

Jöfnuhneppið sem við þurfum að leysa er því

$$\begin{aligned} A + B &= 1, \\ A - B + 2C &= 0, \\ A - 3B - 4C &= 1. \end{aligned}$$

sem hefur lausnina  $A = 3/4$ ,  $B = 1/4$ ,  $C = -1/4$ . Þar með eru stuðlarnir í framsetningunni á  $v$  fundnir og  $u$  fæst síðan með hliðrun á  $t$  um 1.

## 2.3 Euler-jöfnur

**2.3.2.** a) Við byrjum á því að stinga fallinu  $u(x) = x^r$  inn í afleiðujöfnuna,

$$\begin{aligned} x^2 u'' + 2xu' - 6u &= x^2 r(r-1)x^{r-2} + 2xr x^{r-1} - 6x^r \\ &= (r^2 + r - 6)x^r = (r+3)(r-2)x^r = 0. \end{aligned}$$

Núllstöðvarnar eru  $r_1 = -3$  og  $r_2 = 2$ . Samkvæmt setningu 2.3.1 er þá almenn lausn af gerðinni  $u(x) = x^{-3} + c_2 x^2$ .

b) Við förum eins að og í síðasta dæmi og stingum fyrst  $u(x) = x^r$  inn í afleiðujöfnuna. Þá fáum við

$$\begin{aligned} x^2 u'' + 7x u' + 13u &= (r(r-1) + 7r + 13)x^r = \\ &= (r^2 + 6r + 13)x^r = ((r+3)^2 + 4)x^r = 0 \end{aligned}$$

Núllstöðvar margliðunnar  $(r+3)^2 + 4$  eru  $r_1 = -3 + 2i$  og  $r_2 = -3 - 2i$ . Við fáum því almennu lausnina

$$u(x) = c_1 |x|^{-3+2i} + c_2 |x|^{-3-2i}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Það getur verið heppilegt að skipta um grunn með því að notfæra sér Euler-jöfnurnar

$$|x|^{-3 \pm 2i} = |x|^{-3} e^{\pm 2i \ln |x|} = |x|^{-3} (\cos(2 \ln |x|) \pm i \sin(2 \ln |x|)).$$

Þá verður lausnin af gerðinni

$$u(x) = |x|^{-3} (b_1 \cos(2 \ln |x|) + b_2 \sin(2 \ln |x|)).$$

## 2.4 Sérlausnir

**2.4.1.** Kennimargliðan er  $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ . Talan  $2i$  er ekki núllstöð,  $P(2i) = -3 - 4i$ , svo við fáum sérlausnina

$$u_p(t) = \operatorname{Re} \left( \frac{e^{2it}}{-3 - 4i} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{-3 + 4i}{25} (\cos 2t + i \sin 2t) \right) = -\frac{3}{25} \cos 2t - \frac{4}{25} \sin 2t.$$

## 2.5 Green-föll

**2.5.2.** a) Samkvæmt fylgisetningu 2.5.4 er  $G(t, \tau) = g(t - \tau)$ , þar sem  $g$  uppfyllir  $(D^2 - 4D + 3)g = 0$ ,  $g(0) = 0$  og  $g'(0) = 1$ . Kennimargliðan er

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

og núllstöðvar hennar eru  $\lambda = 1$  og  $\lambda = 3$ . Þar með er  $g$  af gerðinni

$$g(t) = Ae^t + Be^{3t}.$$

Upphafsskilyrðin eru

$$\begin{aligned} g(0) &= A + B = 0, \\ g'(0) &= A + 3B = 1. \end{aligned}$$

Við leysum stuðlana út úr þessu hneppi,  $A = -\frac{1}{2}$  og  $B = \frac{1}{2}$ , og svarið er þá fundið

$$G(t, \tau) = -\frac{1}{2} e^{t-\tau} + \frac{1}{2} e^{3(t-\tau)}.$$

**2.5.2.** i) Green-fallið er  $G(t, \tau) = g(t - \tau)$  þar sem  $g$  er lausnin á óhliðruðu jöfnunni, sem uppfyllir  $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$  og  $g'''(0) = 1$ . Núllstöðvar kennijöfnunnar eru  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = -i$ ,  $\lambda_3 = 1$  og  $\lambda_4 = 2$  og þar með er  $g$  af gerðinni

$$g(t) = A \cos t + B \sin t + C e^t + D e^{2t}$$

og upphafsskilyrðin gefa okkur jöfnuhneppið fyrir stuðlana

$$\begin{aligned} A + C + D &= 0, \\ B + C + 2D &= 0, \\ -A + C + 4D &= 0, \\ -B + C + 8D &= 1. \end{aligned}$$

Lausnin er síðan fundin með Gauss-eyðingu:  $A = 3/10$ ,  $B = 1/10$ ,  $C = -5/10$ ,  $D = 2/10$ .

## 2.6 Wronski-fylkið og Wronski-ákveðan

**2.6.1.** a) Afleiðuvirkinn er  $P(t, D) = t^2 D^2 - 5tD + 9$  og í dæmi 2.1.7 sáum við að föllin  $u_1(t) = t^3$  og  $u_2(t) = t^3 \ln t$  mynda grunn í núllrúminu. Nú er ekkert annað að gera en að stinga inn í formúluna (2.6.13),

$$\begin{aligned} G(t, \tau) &= \frac{\begin{vmatrix} \tau^3 & t^3 \\ \tau^3 \ln \tau & t^3 \ln t \end{vmatrix}}{\tau^2 \begin{vmatrix} \tau^3 & \tau^3 \ln \tau \\ 3\tau^2 & 3\tau^2 \ln \tau + \tau^2 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{\tau^3 t^3 (\ln t - \ln \tau)}{\tau^7} = t^3 \tau^{-4} \ln(t/\tau). \end{aligned}$$

## 2.7 Green-föll fyrir jaðargildisverkefni

**2.7.1.** i) Hér er afleiðuvirkinn  $P(D) = -D^2$ ,  $a_2(x) = -1$  og föllin  $u_1(x) = x$  og  $u_2(x) = 1$  uppfylla jaðarskilyrðin í sitt hvorum endapunktinum,  $u_1(0) = 0$  og  $u_2'(1) = 0$ . Wronski-ákveðan er

$$W(u_1, u_2)(\xi) = \begin{vmatrix} \xi & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

og þar með er  $a_2(\xi)W(u_1, u_2)(\xi) = 1$ . Við getum því beitt zformúlu (2.7.18)

$$G_B(x, \xi) = \begin{cases} \xi, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1, \\ x, & 0 \leq x \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

## 2.8 Veik markgildi, veikar afleiður og föll Diracs

**2.8.6.** Tökum  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Þá er

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(x) \varphi(x) dx &= \int_0^{+\infty} t e^{itx} \varphi(x) dx \\ &= \left[ -i e^{itx} \varphi(x) \right]_0^\infty + \int_0^{+\infty} i e^{itx} \varphi'(x) dx \\ &= i\varphi(0) + \left[ \frac{1}{t} e^{itx} \varphi'(x) \right]_0^\infty - \frac{1}{t} \int_0^{+\infty} e^{itx} \varphi''(x) dx \\ &= i\varphi(0) - \frac{1}{t} \left( \varphi'(0) + \int_0^{+\infty} e^{itx} \varphi''(x) dx \right) \\ &\rightarrow i\varphi(0) = i\delta(\varphi). \end{aligned}$$

### 3.2 Raðalausnir umhverfis venjulega punkta

3.2.1. a) Við notum formúlurnar í sýnidæmi 3.2.9 og stingum inn í jöfnuna

$$\begin{aligned} x^2 u'' - u'' + 4xu' + 2u &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n + 4 \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [-(n+2)(n+1)c_{n+2} + (n(n-1) + 4n + 2)c_n] x^n = 0 \end{aligned}$$

Nú athugum við að  $n(n-1) + 4n + 2 = n^2 + 3n + 2 = (n+2)(n+1)$  og þar með er rakningarformúlan

$$c_{n+2} = c_n.$$

Stuðlarnir við öll veldin með sléttu númeri eru þeir sömu og stuðlarnir við veldin með oddatölunúmeri eru einnig þau sömu. Svarið er því

$$u(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = (c_0 + c_1 x) \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{c_0 + c_1 x}{1 - x^2}.$$

3.2.2. a) Við stingum veldaröð inn í jöfnuna og fáum þá

$$\begin{aligned} u'' + u + xu &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n \\ &= (2c_2 + c_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n + c_{n-1}] x^n = 0. \end{aligned}$$

Rakningarformúlan verður þá

$$2c_2 + c_0 = 0, \quad (n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n + c_{n-1} = 0.$$

Grunnfallið  $u_1$  er valið þannig að  $c_0 = 1$  og  $c_1 = 0$ . Í framhaldi af því fáum við

$$c_2 = -\frac{1}{2}, \quad 3 \cdot 2 \cdot c_3 + 0 + 1 = 0, \quad c_3 = -\frac{1}{6}.$$

Þar með er

$$u_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

Grunnfallið  $u_2$  er hins vegar valið þannig að  $c_0 = 0$  og  $c_1 = 1$ . Við höfum því

$$\begin{aligned} 2c_2 + 0 = 0, \quad c_2 = 0, \quad 3 \cdot 2 \cdot c_3 + 1 + 0 = 0, \quad c_3 = -\frac{1}{6}, \\ 4 \cdot 3 \cdot c_4 + 0 + 1 = 0, \quad c_4 = -\frac{1}{12}, \end{aligned}$$

og þar með er

$$u_2(x) = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \dots$$

### 3.4 Reglulegir sérstöðupunktur – Aðferð Frobeniusar

3.4.1. a) Hér er  $p(x) = \frac{2}{3}$  og  $q(x) = \frac{1}{3}x^2$ , svo vísaþafnan er

$$r(r-1) + \frac{2}{3}r = r(r - \frac{1}{3}) = 0$$

Núllstöðvar hennar eru  $r_1 = \frac{1}{3}$  og  $r_2 = 0$ . Við erum því með tilfelli (ii) í setningu Frobeniusar og leitum næst að lausn á forminu  $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ . Við stingum henni inn í jöfnuna,

$$\begin{aligned} 3x^2 u'' + 2xu' + x^2 u &= 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} \\ &= [3r(r-1) + 2r]c_0 x^r + [3(r+1)r + 2(r+1)]c_1 x^{r+1} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} [(3(n+r)(n+r-1) + 2(n+r))c_n + c_{n-2}]x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

Í fyrsta liðnum í hægri hliðinni stendur vísamargliðan, svo við getum valið  $c_0$  frjálst, ef  $r = r_1$  eða  $r = r_2$ , en  $c_1 = 0$  verður að gilda til þess að stuðullinn við  $x^{r+1}$  sé 0. Rakningarformúlan verður síðan

$$c_n = \frac{-1}{(n+r)(3n+3r-1)} c_{n-2}.$$

Stuðlarnir við veldin með oddatölunúmer verða því 0. Í tilfallinu  $r = r_1 = \frac{1}{3}$  fáum við

$$c_{2k} = \frac{-1}{(2k+1/3)6k} c_{2(k-1)} = \frac{-1}{2k(6k+1)} c_{2(k-1)}.$$

Til þess að fá beina formúlu fyrir stuðlana, þá skrifum við

$$\begin{aligned} c_{2k} &= c_0 \cdot \frac{c_2}{c_0} \cdot \frac{c_4}{c_2} \cdots \frac{c_{2k}}{c_{2(k-1)}} \\ &= c_0 \cdot \frac{(-1)}{2 \cdot 1 \cdot 7} \cdot \frac{(-1)}{2 \cdot 2 \cdot 13} \cdots \frac{(-1)}{2 \cdot k \cdot (6k+1)} \\ &= \frac{(-1)^k}{2^k k! \cdot 7 \cdot 13 \cdots (6k+1)}. \end{aligned}$$

Ef við setjum hins vegar  $r = 0$  inn í rakningarformúluna, þá fáum við

$$c_{2k} = \frac{-1}{2k(6k-1)} c_{2(k-1)}.$$

og með sömu aðferð og áður fáum við

$$\begin{aligned} c_{2k} &= c_0 \cdot \frac{c_2}{c_0} \cdot \frac{c_4}{c_2} \cdots \frac{c_{2k}}{c_{2(k-1)}} \\ &= c_0 \cdot \frac{(-1)}{2 \cdot 1 \cdot 5} \cdot \frac{(-1)}{2 \cdot 2 \cdot 11} \cdots \frac{(-1)}{2 \cdot k \cdot (6k-1)} \\ &= \frac{(-1)^k}{2^k k! \cdot 5 \cdot 11 \cdots (6k-1)}. \end{aligned}$$

Svarið er því að almenn lausn jöfnunnar er línuleg samantekt fallanna  $u_1$  og  $u_2$  sem gefin eru með formúlunum

$$\begin{aligned} u_1(x) &= x^{1/3} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n \cdot n! \cdot 7 \cdot 13 \cdots (6n+1)} \right), \\ u_2(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n \cdot n! \cdot 5 \cdot 11 \cdots (6n-1)}. \end{aligned}$$

3.4.2. g) Við getum skrifað afleiðujöfnuna sem  $x^2u'' + xp(x)u' + q(x)u = 0$ , með

$$p(x) = \frac{6 \sin x}{x} \quad \text{og} \quad q(x) = 6.$$

Fallið  $p$  hefur afmáanlegan sérstöðupunkt í  $a = 0$  og þetta er því reglulegur sérstöðupunktur. Vísajafnan er

$$r(r-1) + p(0)r + q(0) = r^2 - r + 6r + 6 = (r+2)(r+3) = 0$$

og núllstöðvar hennar eru  $r_1 = -2$  og  $r_2 = -3$ .

## 4.1 Varpanir á tvinntöluplaninu

4.1.1. a) Ef við skrifum  $z = x + iy$ , þá eru jafngildar jöfnur

$$\begin{aligned} |z-1|^2 &= |z+2|^2, \\ |z|^2 - z - \bar{z} + 1 &= |z|^2 + 2z + 2\bar{z} + 4, \\ 3(z + \bar{z}) &= -3, \\ x &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Þetta er því jafna lóðréttu línunnar gegnum punktinn  $-\frac{1}{2}$ .

4.1.2. Við skulum skrifa  $A = \alpha + i\beta$  og  $B = \gamma + i\delta$ , þar sem  $\alpha, \beta, \gamma$  og  $\delta$  eru rauntölur. Þá er

$$\begin{aligned} L(z) &= Az + B\bar{z} = (\alpha + i\beta)(x + iy) + (\gamma + i\delta)(x - iy) \\ &= (\alpha + \gamma)x + (-\beta + \delta)y + i(\beta + \delta)x + i(\alpha - \gamma)y. \end{aligned}$$

Fylki vörpunarinnar  $L$  miðað við staðalgrunninn  $(1, 0)$  og  $(0, 1)$  í  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  er því

$$\begin{bmatrix} (\alpha + \gamma) & (-\beta + \delta) \\ (\beta + \delta) & (\alpha - \gamma) \end{bmatrix},$$

og ákveða þess er

$$(\alpha + \gamma)(\alpha - \gamma) - (-\beta + \delta)(\beta + \delta) = \alpha^2 - \gamma^2 + \beta^2 - \delta^2 = |A|^2 - |B|^2.$$

Vörpunin  $L$  er gagntæk þá og því aðeins að ákveðan sé  $\neq 0$ , svo svarið verður  $|A| \neq |B|$ .

## 4.2 Fágað föll

4.2.1. a) Ef  $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$  þá er  $\partial f / \partial \bar{z} = z$ . Cauchy-Riemann-jafnan er aðeins uppfyllt í punktinum  $z = 0$  og því er fallið  $f$  ekki fágað í grennd við neinn punkt.

4.2.1. f) Hér er  $f(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) + i$  og  $\partial f / \partial \bar{z} = \frac{1}{2}$ . Fallið  $f$  er því ekki fágað.

4.2.2. a) Við höfum

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{Re}f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x - 4, \\ v(x, y) &= \operatorname{Im}f(x, y) = 3x^2y - y^3 + y, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 + 1, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -6xy, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 6xy, & \frac{\partial v}{\partial y} &= 3x^2 - 3y^2 + 1. \end{aligned}$$

Greinilegt er að Cauchy-Riemann-jöfnurnar eru uppfylltar,  $\partial u / \partial x = \partial v / \partial y$  og  $\partial u / \partial y = -\partial v / \partial x$ , og þar með er  $f$  fágað fall. Athugið að  $f(z) = z^3 + z - 4$ .

## 4.4 Stofnbrotaliðun

4.4.1. d) Ræða fallið táknum við með

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2} = \frac{z^2}{(z - i)^2(z + i)^2}.$$

Margliðan  $Q$  hefur núllstöðvarnar  $\alpha_1 = i$  og  $\alpha_2 = -i$  og eru þær báðar af stigi 2. Við höfum

$$\begin{aligned} q_1(z) &= (z + i)^2, & \frac{P(i)}{q_1(i)} &= \frac{1}{4}, \\ \frac{d}{dz} \left( \frac{z^2}{(z + i)^2} \right) &= \frac{2z(z + i)^2 - z^2 2(z + i)}{(z + i)^4}, \\ \left. \frac{d}{dz} \left( \frac{P(z)}{q_1(z)} \right) \right|_{z=i} &= \frac{-i}{4}, \\ q_2(z) &= (z - i)^2, & \frac{P(-i)}{q_2(-i)} &= \frac{1}{4}, \\ \frac{d}{dz} \left( \frac{z^2}{(z - i)^2} \right) &= \frac{2z(z - i)^2 - z^2 2(z - i)}{(z - i)^4}, \\ \left. \frac{d}{dz} \left( \frac{P(z)}{q_2(z)} \right) \right|_{z=-i} &= \frac{i}{4}. \end{aligned}$$

Svarið verður því

$$\frac{z^2}{(z^2 + 1)^2} = \frac{-i/4}{(z - i)} + \frac{1/4}{(z - i)^2} + \frac{i/4}{(z + i)} + \frac{1/4}{(z + i)^2}.$$

## 4.5 Veldisvísifallið og skyld föll

4.5.2. a) Núllstöðvar  $\cos$  uppfylla  $\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = 0$ . Ef við margföldum í gegnum þessa jöfnu með  $2e^{iz}$ , þá fáum við jafngilda jöfnu

$$e^{2iz} = -1.$$

Lausnir þessarar jöfnu eru  $2iz = i\pi + i2n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  og þar með fáum við að

$$z = \frac{1}{2}\pi + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

eru núllstöðvar  $\cos$ . Á þessu sjáum við að engar núllstöðvar bætast við þegar skilgreiningarsvæði  $\cos$  er útvíkkað frá  $\mathbb{R}$  yfir á  $\mathbb{C}$ .

4.5.3. a) Við beitum samlagningarformúlu  $\cos$ -fallsins,

$$\cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy).$$

Nú er

$$\begin{aligned} \cos(iy) &= \frac{1}{2}(e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}) = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y) = \cosh y, \\ \sin(iy) &= \frac{1}{2i}(e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}) = \frac{-i}{2}(e^{-y} - e^y) = i \sinh y. \end{aligned}$$

Þar með er

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

## 4.6 Lograr, rætur og horn

4.6.2. a) Skrifum  $w = \arcsin z$ . Þá er  $z = \sin w$ . Ef við setjum  $f(w) = \sin w$ , þá er

$$f'(w) = \cos w = (1 - \sin^2 w)^{\frac{1}{2}} = (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$$

Hér er höfuðgrein kvaðratrótartarinnar tekin. Í sýnidæmi 4.6.4 vorum við búin að sannfæra okkur um að  $1 - z^2$  væri punktur í  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ , sem er skilgreiningarsvæði höfuðgreinarinnar. Samkvæmt reiknireglunni um afleiður af andhverfu falls er

$$\frac{d}{dz} \arcsin z = (f^{[-1]})'(z) = \frac{1}{f'(w)} = \frac{1}{(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

4.6.4. c)  $1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\pi/3}$  og því er

$$4\text{Log}(1 + \sqrt{3}i) = 4(\ln 2 + i\pi/3) = 4\ln 2 + i4\pi/3.$$

Athugið að hér á að setja töluna fram með horngildi á bilinu  $]-\pi, \pi[$ .

4.6.4. d)  $(1 + \sqrt{3}i)^4 = 2^4 e^{i4\pi/3} = 2^4 e^{-i2\pi/3}$  og því er

$$\text{Log}(1 + \sqrt{3}i)^4 = \ln 2^4 - i2\pi/3 = 4\ln 2 - i2\pi/3.$$

Athugið að  $\text{Log}(1 + \sqrt{3}i)^4 \neq 4\text{Log}(1 + \sqrt{3}i)$ .

4.6.5. c) Eftirfarandi jöfnur eru jafngildar

$$\begin{aligned} \sin z = i, & \quad \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = i, & \quad e^{iz} - e^{-iz} = -2, \\ e^{2iz} + 2e^{iz} = 1, & \quad (e^{iz} + 1)^2 = 2, & \quad e^{iz} = -1 \pm \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Við fáum því lausnirnar

$$iz = \ln(\sqrt{2} - 1) + 2\pi ni, \quad iz = \ln(\sqrt{2} + 1) + \pi i + 2\pi ni, \quad n \in \mathbb{Z},$$

og þar með er svarið fundið

$$z = -i \ln(\sqrt{2} - 1) + 2\pi n, \quad z = -i \ln(\sqrt{2} + 1) + \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

## 5.2 Hneppi með fastastuðla

5.2.1. a) Kennijafnan er

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 5)(\lambda - 1) - 4 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 1. \end{aligned}$$

Eigingildin eru  $\lambda_1 = 3 - 2\sqrt{2}$  og  $\lambda_2 = 3 + 2\sqrt{2}$ . Eiginvigrana reiknum við út úr

$$\begin{aligned} ((3 - 2\sqrt{2})I - A)\varepsilon_1 &= \begin{bmatrix} -2 - 2\sqrt{2} & -2 \\ -2 & 2 - 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \varepsilon_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix}, \\ ((3 + 2\sqrt{2})I - A)\varepsilon_2 &= \begin{bmatrix} -2 + 2\sqrt{2} & -2 \\ -2 & 2 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Samkvæmt setningu 5.2.2 er almenn lausn

$$u(t) = \beta_1 e^{(3-2\sqrt{2})t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix} + \beta_2 e^{(3+2\sqrt{2})t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

**5.2.2.** a) Samkvæmt dæmi 5.2.1 a), þá þurfum við aðeins að finna hnit vigursins  $b = (1, 0)$  miðað við eiginvigrarunninn  $\varepsilon_1$  og  $\varepsilon_2$ . Til þess þurfum við að leysa jöfnuhneppi

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 + \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2} & 1 \\ -1 - \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ -1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Svarið er því

$$u(t) = \frac{1 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} e^{(3-2\sqrt{2})t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix} - \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} e^{(3+2\sqrt{2})t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

**5.2.3.** a) Samkvæmt setningu 5.2.2 er almenn lausn hliðruðu jöfnunnar  $u' = Au + f(t)$  gefin með formúlunni  $u(t) = v_1(t)\varepsilon_1 + v_2(t)\varepsilon_2$ , þar sem

$$v_j(t) = \beta_j e^{\lambda_j t} + e^{\lambda_j t} \int_0^t e^{-\lambda_j \tau} g_j(\tau) d\tau,$$

eigingildin eru  $\lambda_1 = 3 - 2\sqrt{2}$  og  $\lambda_2 = 3 + 2\sqrt{2}$  og tilsvaramandi eiginvigrar eru  $\varepsilon_1 = (-1, 1 + \sqrt{2})$  og  $\varepsilon_2 = (-1, 1 - \sqrt{2})$ . Hnit fallsins  $f$  miðað við eiginvigrana  $\varepsilon_1$  og  $\varepsilon_2$  táknum við með  $(g_1, g_2)$ . Við byrjum á því að ákvarða þau,

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 + \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix} = \frac{e^t}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ -1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Þar með er

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \beta_1 e^{(3-2\sqrt{2})t} + e^{(3-2\sqrt{2})t} \int_0^t e^{(-3+2\sqrt{2})\tau} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} e^\tau d\tau \\ &= \beta_1 e^{(3-2\sqrt{2})t} + e^{(3-2\sqrt{2})t} \int_0^t e^{-2(1-\sqrt{2})\tau} \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} d\tau \\ &= \left(\beta_1 + \frac{1}{4\sqrt{2}}\right) e^{(3-2\sqrt{2})t} - \frac{1}{4\sqrt{2}} e^t, \\ v_2(t) &= \beta_2 e^{(3+2\sqrt{2})t} + e^{(3+2\sqrt{2})t} \int_0^t e^{(-3-2\sqrt{2})\tau} \cdot \frac{-1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} e^\tau d\tau \\ &= \beta_2 e^{(3+2\sqrt{2})t} + e^{(3+2\sqrt{2})t} \int_0^t e^{-2(1+\sqrt{2})\tau} \frac{-1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} d\tau \\ &= \left(\beta_2 - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right) e^{(3+2\sqrt{2})t} + \frac{1}{4\sqrt{2}} e^t, \end{aligned}$$

Sem sérlausn getum við því tekið

$$u_p(t) = -\frac{e^t}{4\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix} + \frac{e^t}{4\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5.2.5. b) Kennijafnan er:

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -4 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)[\lambda(\lambda - 5) + 4] + [-2(\lambda - 5) - 4] - 4[2 - \lambda] \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) + 2(\lambda - 2) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).\end{aligned}$$

Eigingildin eru því  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  og  $\lambda_3 = 3$ . Við ákvörðum nú eiginvigrana með því að leysa jöfnurnar

$$\begin{aligned}(I - A)\varepsilon_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \varepsilon_1 &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ (2I - A)\varepsilon_2 &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \varepsilon_2 &= \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \\ (3I - A)\varepsilon_3 &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \varepsilon_3 &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Almenn lausn er því

$$u(t) = \beta_1 e^t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta_2 e^{2t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \beta_3 e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

5.2.6. b) Við reiknuðum út almenna lausn í dæmi 5.2.5 b) og þurfum að ákvarða hnit  $b$  miðað við eiginvigrarunninn. Við táknum þau með  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  og þurfum að leysa þau út úr hneppinu

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Með Gauss-eyðingu fáum við  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (0, 1, -1)$  og svarið er því

$$u(t) = e^t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

## 6.2 Skilgreiningar og helstu reiknireglur

6.2.1. d) Fallið  $f$  er jafnstætt, svo reikniregla (vii) gefur okkur

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= 2 \int_0^1 (1 - x) \cos(x\xi) dx \\ &= 2 \left[ \frac{(1 - x) \sin(x\xi)}{\xi} \right]_0^1 - \frac{2}{\xi} \int_0^1 (-1) \sin(x\xi) dx \\ &= \frac{2}{\xi} \left[ \frac{-\cos(x\xi)}{\xi} \right]_0^1 = \frac{2(1 - \cos \xi)}{\xi^2}.\end{aligned}$$

### 6.3 Andhverf Fourier-ummyndun

**6.3.1.** a) Setjum  $f(x) = \max\{1 - |x|, 0\}$ , sem er fallið úr dæmi 6.2.1 d). Það er samfelld deildanlegt á köflum og samfelld, svo andhverfuformúlan gefur

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \frac{2(1 - \cos \xi)}{\xi^2} d\xi = f(x).$$

Nú er  $\hat{f}$  jafnstætt fall svo heildið í hægri hliðinni er

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(x\xi) \frac{1 - \cos \xi}{\xi^2} d\xi = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

**6.3.2.** a) Samkvæmt sýnidæmi 6.2.1 (iii) er

$$\mathcal{F}\{e^{-|x|}\}(\xi) = \frac{2}{1 + \xi^2}.$$

Andhverfuformúlan segir að  $\mathcal{F}\mathcal{F}\varphi(x) = 2\pi\varphi(-x)$ , svo ef við tökum Fourier-mynd beggja vegna jafnaðarmerkisins, þá fáum við

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{1 + x^2}\right\}(\xi) = \frac{2\pi}{2} e^{-|\xi|} = \pi e^{-|\xi|}.$$

Nú beitum við reiknireglu (ii) og fáum

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{1 + 2x^2}\right\}(\xi) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{1 + (\sqrt{2}x)^2}\right\}(\xi) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-|\xi|/\sqrt{2}}.$$

Að lokum fáum við með reiknireglu (iv)

$$\mathcal{F}\left\{\frac{e^{ix}}{1 + 2x^2}\right\}(\xi) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{1 + (\sqrt{2}x)^2}\right\}(\xi - 1) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-|\xi-1|/\sqrt{2}}.$$

**6.3.3.** a) Samkvæmt sýnidæmi 6.2.1 (iii) er

$$\mathcal{F}\{e^{-4|x|}\}(\xi) = \frac{2 \cdot 4}{4^2 + \xi^2} = \frac{8}{16 + \xi^2}.$$

Andhverfuformúlan segir að  $\mathcal{F}\mathcal{F}\varphi(x) = 2\pi\varphi(-x)$ , svo

$$\mathcal{F}\left\{\frac{8}{16 + x^2}\right\}(\xi) = 2\pi e^{-4|\xi|}.$$

Samkvæmt reiknireglu (ii) er

$$\mathcal{F}\left\{\frac{8}{16 + (x+2)^2}\right\}(\xi) = 2\pi e^{2i\xi} e^{-4|\xi|} = 2\pi \hat{f}(\xi).$$

Þar með er svarið

$$f(x) = \frac{4}{\pi(16 + (x+2)^2)} = \frac{4}{\pi(x^2 + 4x + 20)}.$$

## 6.4 Földun og Fourier–ummyndun

6.4.1. a) Samkvæmt sýnidæmi 6.2.2 er

$$\mathcal{F}\{e^{-x^2}\}(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}.$$

Reikniregla (ii) gefur

$$\mathcal{F}\{e^{-2x^2}\}(\xi) = \mathcal{F}\{e^{-(\sqrt{2}x)^2}\}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}e^{-\xi^2/8}.$$

Það stendur földunarheildi í vinstri hlið jöfnunnar, svo reikniregla (xi) gefur okkur

$$\hat{u}(\xi) \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}e^{-\xi^2/8} = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}.$$

Fourier-myndin er því fundin

$$\hat{u}(\xi) = \sqrt{2}e^{-\xi^2/8}.$$

Nú notum við andhverfuformúluna

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\mathcal{F}u(-x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{\sqrt{2}e^{-\xi^2/8}\}(x) \\ &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{8}}{2\pi}\mathcal{F}\{e^{-\xi^2}\}(\sqrt{8}x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\pi}e^{-(\sqrt{8}x)^2/4} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-2x^2}. \end{aligned}$$

## 6.5 Afleiðujöfnur og Fourier–ummyndun

6.5.3. a) Margliðan er  $P(\zeta) = (\zeta + 1)^2$  og hún hefur eina tvöfalda núllstöð  $\lambda_1 = -1$ . Stofnbrotaliðunin er einfaldlega

$$\frac{1}{P(\zeta)} = \frac{1}{(\zeta + 1)^2},$$

og því gefur setning 6.5.1 okkur að  $E(x) = H(x)xe^{-x}$ . Lausnina  $u$  fáum við með földunarreglunni

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(x-y)(x-y)e^{-(x-y)}f(y)dy \\ &= xe^{-x} \int_{-\infty}^x e^y f(y)dy - e^{-x} \int_{-\infty}^x ye^y f(y)dy. \end{aligned}$$

Ef við setjum nú  $f(x) = H(x)xe^{-x}$  inn í þessa formúlu, þá fáum við greinilega  $u(x) = 0$  ef  $x \leq 0$  og fyrir  $x \geq 0$  fáum við

$$u(x) = xe^{-x} \int_0^x e^y ye^{-y} dy - e^{-x} \int_0^x ye^y ye^{-y} dy = \frac{1}{6}x^3 e^{-x}.$$

## 6.6 Plancherel–jafnan

6.6.1. Samkvæmt sýnidæmi 6.2.1 og andhverfuformúlunni er  $\hat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$  og því er

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi^2 e^{-2|\xi|} d\xi = \pi \int_0^{+\infty} e^{-2|\xi|} d\xi = \frac{\pi}{2}.$$

## 7.1 Skilgreiningar og nokkrar reiknireglur

7.1.2. a)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin^2 t\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)\right\}(s) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}\{1\}(s) - \mathcal{L}\{\cos(2t)\}(s)) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{s^2 + 4 - s^2}{s(s^2 + 4)}\right) \\ &= \frac{2}{s(s^2 + 4)}.\end{aligned}$$

Fallið  $\mathcal{L}f$  er fagað á menginu  $\mathbb{C} \setminus \{0, 2i, -2i\}$ .

7.1.3. b) Af myndinni sjáum við að  $f(t) = N$  ef  $t \in [N-1, N[$  og þar með er

$$f(t) = N = N\chi_{[N-1, N[}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n\chi_{[n-1, n[}(t),$$

því allir liðirnir í summunni eru 0, nema sá með númerið  $N$ . Eins höfum við að  $H(t-n) = 1$  ef  $0 \leq t < N$ , en þetta eru  $N$  liðir, og  $H(t-n) = 0$  ef  $n \geq N$ . Þar með er

$$f(t) = N = \sum_{n=0}^{N-1} H(t-n) = \sum_{n=0}^{\infty} H(t-n).$$

Við fáum því Laplace-myndina

$$\mathcal{L}f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{H(t-n)\}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s} e^{-ns} = \frac{1}{s(1-e^{-s})}.$$

## 7.2 Andhverfa Laplace–ummyndunin

7.2.1. b)

$$\begin{aligned}F(s) &= 3 \cdot \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^2 + 4} \\ &= 3\mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\sin 2t\}(s).\end{aligned}$$

Þar með er

$$\mathcal{L}^{[-1]}F(t) = 3 \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t.$$

## 7.3 Laplace–ummyndunin og upphafsgildisverkefni

7.3.1. a) Við setjum  $U(s) = \mathcal{L}u(s)$ , tökum Laplace-mynd af öllum liðum jöfnunnar og stingum inn upphafsgildunum

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u''\}(s) &= s^2U(s) - su(0) - u'(0) = s^2U(s) - 2s - 3, \\ \mathcal{L}\{u'\}(s) &= sU(s) - u(0) = sU(s) - 2.\end{aligned}$$

Laplace-myndin  $U$  verður þá að uppfylla jöfnua

$$(s^2U(s) - 2s - 3) + 6(sU(s) - 2) + 25U(s) = 0,$$

en það jafngildir

$$U(s) = \frac{2s + 15}{s^2 + 6s + 25} = \frac{2s + 15}{(s + 3)^2 + 16}.$$

Nú vitum við að

$$\mathcal{L}\{e^{-3t} \cos 4t\}(s) = \frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 16} \quad \text{og} \quad \mathcal{L}\{e^{-3t} \sin 4t\}(s) = \frac{4}{(s + 3)^2 + 16}.$$

Við notfærum okkur þessa vitneskju og liðum  $U$  því í

$$\begin{aligned} U(s) &= 2 \cdot \frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 16} + \frac{9}{4} \frac{4}{(s + 3)^2 + 16} \\ &= 2\mathcal{L}\{e^{-3t} \cos 4t\}(s) + \frac{9}{4}\mathcal{L}\{e^{-3t} \sin 4t\}(s). \end{aligned}$$

Svarið er því

$$u(t) = 2e^{-3t} \cos 4t + \frac{9}{4}e^{-3t} \sin 4t.$$

**7.3.2.** Við táknum Laplace-myndir fallanna  $u_1, u_2, u_3$  með  $U_1, U_2, U_3$  og tókum Laplace-myndir beggja vegna jafnaðarmerkisins

$$\begin{aligned} sU_1(s) - 1 + sU_2(s) - 1 &= \frac{1}{s - 1} - \frac{1}{s + 1}, \\ sU_2(s) - 1 + sU_3(s) &= \frac{1}{s - 1}, \\ sU_3(s) + sU_1(s) - 1 &= \frac{2}{s - 1} + \frac{1}{s + 1}. \end{aligned}$$

Jöfnuhneppið sem við þurfum að leysa er því

$$\begin{aligned} U_1(s) + U_2(s) &= \frac{2}{s} + \frac{1}{s(s - 1)} - \frac{1}{s(s + 1)} = \frac{1}{s - 1} + \frac{1}{s + 1}, \\ U_2(s) + U_3(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s(s - 1)} = \frac{1}{s - 1}, \\ U_1(s) + U_3(s) &= \frac{1}{s} + \frac{2}{s(s - 1)} + \frac{1}{s(s + 1)} = \frac{2}{s - 1} - \frac{1}{s + 1}. \end{aligned}$$

Með Gauss-eyðingu fáum við síðan

$$\begin{aligned} U_1(s) &= \frac{1}{s - 1} = \mathcal{L}\{e^t\}(s), \\ U_2(s) &= \frac{1}{s + 1} = \mathcal{L}\{e^{-t}\}(s), \\ U_3(s) &= \frac{1}{s - 1} - \frac{1}{s + 1} = \mathcal{L}\{e^t - e^{-t}\}(s). \end{aligned}$$

**7.3.3.** Við skilgreinum  $U(s) = \mathcal{L}u(s)$  og  $V(s) = \mathcal{L}v(s)$ . Við beitum síðan reiknireglunum um Laplace-ummyndun af afleiðum og setjum inn upphafsgildin

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u'\}(s) &= sU(s) - u(0) = sU(s), \\ \mathcal{L}\{v'\}(s) &= sV(s) - v(0) = sV(s) - 1, \\ \mathcal{L}\{u''\}(s) &= s^2U(s) - su(0) - u'(0) = s^2U(s), \\ \mathcal{L}\{v''\}(s) &= s^2V(s) - sv(0) - v'(0) = s^2V(s) - s. \end{aligned}$$

Nú tókum við Laplace-myndir af öllum liðum í jöfnunum og setjum gildi þeirra inn í jöfnurnar

$$\begin{aligned} s^2U(s) + 2U(s) + (sV(s) - 1) &= 0, \\ (s^2V(s) - s) + 2V(s) - sU(s) &= 0. \end{aligned}$$

Nú setjum við þetta jöfnuhneppi upp á fylkjaformi

$$\begin{bmatrix} s^2 + 2 & s \\ -s & s^2 + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ V(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}.$$

Ákveða stuðlafylkisins er

$$(s^2 + 2)(s^2 + 2) + s^2 = s^4 + 5s^2 + 4 = (s^2 + 1)(s^2 + 4).$$

Þar með er

$$\begin{bmatrix} U(s) \\ V(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} \begin{bmatrix} s^2 + 2 & -s \\ s & s^2 + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}.$$

Nú þurfum við að finna stofnbrotaliðun á föllunum  $U(s)$  og  $V(s)$ . Við athugum að annars stigs margliðurnar  $s^2 + 1$  og  $s^2 + 4$  eru óþáttanlegar yfir rauntölurnar, svo

$$U(s) = \frac{2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{A + Bs}{s^2 + 1} + \frac{C +Ds}{s^2 + 4}.$$

Við margföldum í gegnum þessa jöfnu með  $s^2 + 1$  og setjum síðan  $s = i$  inn í hana. Það gefur

$$\frac{2}{3} = A + iB, \quad A = \frac{2}{3}, \quad B = 0.$$

Nú margföldum við í gegn með  $s^2 + 4$  og setjum síðan  $s = 2i$ . Það gefur

$$-\frac{2}{3} = C + 2iD, \quad C = -\frac{2}{3}, \quad D = 0.$$

Þetta gefur okkur

$$U(s) = \frac{2/3}{s^2 + 1} + \frac{-2/3}{s^2 + 4} = \frac{2}{3}\mathcal{L}\{\sin t\}(s) - \frac{1}{3}\mathcal{L}\{\sin 2t\}(s).$$

Við liðum  $V(s)$  með sömu aðferð og fáum

$$V(s) = \frac{2}{3}\frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{3}\frac{s}{s^2 + 4} = \frac{2}{3}\mathcal{L}\{\cos t\}(s) + \frac{1}{3}\mathcal{L}\{\cos 2t\}(s).$$

## 7.4 Green-fallið og földun

**7.4.2.** a) Við táknum Laplace-myndina með  $U(s)$  og látum Laplace-ummyndunina verka beggja vegna jafnaðarmerkisins

$$U(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{s^2} \cdot U(s).$$

Við leysum  $U(s)$  út úr þessari jöfnu og fáum

$$U(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2} = \frac{1}{(s - i)^2(s + i)^2}$$

Stofnbrotaliðun gefur

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{1}{4i(s - i)} - \frac{1}{4(s - i)^2} - \frac{1}{4i(s + i)} - \frac{1}{4(s + i)^2} \\ &= \frac{1}{4i}\mathcal{L}\{e^{it}\}(s) - \frac{1}{4}\mathcal{L}\{te^{it}\}(s) - \frac{1}{4i}\mathcal{L}\{e^{-it}\}(s) - \frac{1}{4}\mathcal{L}\{te^{-it}\}(s) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\{\sin t\}(s) - \mathcal{L}\{t \cos t\}(s)\right). \end{aligned}$$

## 7.6 Laplace-ummyndun af dreifföllum

**7.6.1.** e) Við byrjum á því að taka Laplace-myndina af liðunum í summunni  $\mathcal{L}\{\delta_{n\pi}\}(s) = e^{-n\pi s}$ . Þá verður lausnin að uppfylla

$$\mathcal{L}u(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n\pi s}}{s^2 + 1}.$$

Reikniregla (ii) í setningu 7.1.3 gefur okkur

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H(t - n\pi) \sin(t - n\pi).$$

Nú er  $\sin(t - n\pi) = (-1)^n \sin t$  og  $H(t - n\pi) = 0$  ef  $t < n\pi$ . Fyrir  $N\pi \leq t < (N + 1)\pi$  gildir því

$$u(t) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \sin t = \begin{cases} \sin t, & \text{ef } N \text{ er oddatala,} \\ 0, & \text{ef } N \text{ er slétt tala.} \end{cases}$$

Við getum litið svo á að hægri hliðin í þessu jöfnuhneppi sé kraftsvið, sem verkar með atlagi 1 við tímenn  $n\pi$  á hreintóna sveifil með lotu  $T = 2\pi$ . Sveiflinum er komið af stað með höggi við tímenn  $t = 0$ , en eftir hálfu lotu við tímenn  $t = \pi$  er hann stöðvaður. Honum er haldið kyrrum fram til  $t = 2\pi$  og þá er honum komið af stað aftur. Þannig fæst  $2\pi$ -lotubundin hreyfing.

## 8.5 Parseval-jafnan

**8.5.1.** Fourier-stuðlarnir eru  $c_0 = \pi^2/3$  og  $c_n = 2(-1)^n/n^2$ , ef  $n \neq 0$ . Parseval-formúlan gefur því

$$\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 + \sum_{n \neq 0} \frac{4}{n^4} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{5}.$$

Við leysum nú summuna út úr þessari jöfnu

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^4} = \frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} = \frac{4\pi^4}{45}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

## 8.7 Fourier-raðir og afleiðujöfnur

**8.7.5.** Fourier-röðin hefur stuðlana

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 \sin(n\pi x) \varphi(x) dx = 2 \int_0^{1/2} \sin(n\pi x) 2x dx + 2 \int_{1/2}^1 \sin(n\pi x) (2 - 2x) dx \\ &= 2 \left[ \frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi} 2x \right]_{x=0}^{1/2} + 4 \int_0^{1/2} \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} dx \\ &\quad + 2 \left[ \frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi} (2 - 2x) \right]_{x=1/2}^1 - 4 \int_{1/2}^1 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} dx \\ &= 2 \frac{\cos(n\pi/2)}{n\pi} + 4 \left[ \frac{\sin(n\pi x)}{n^2\pi^2} \right]_0^{1/2} + 2 \frac{\cos(n\pi/2)}{n\pi} - 4 \left[ \frac{\sin(n\pi x)}{n^2\pi^2} \right]_{1/2}^1 \\ &= \begin{cases} \frac{8(-1)^k}{n^2\pi^2}, & n = 2k + 1 \text{ oddatala,} \\ 0, & n \text{ slétt tala.} \end{cases} \end{aligned}$$

Skrifum nú lausnina  $u(x, t)$  sem Fourier-röð  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(n\pi x)$ , stingum henni síðan inn í hlutafleiðujöfnuna

$$\partial_t^2 u + 2\partial_t u - \partial_x^2 u = \sum_{n=1}^{\infty} \left( T_n''(t) + 2T_n'(t) + n^2\pi^2 T_n(t) \right) \sin(n\pi x) = 0$$

og athugum upphafsskilyrðin

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) = \varphi(x),$$

$$\partial_t u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \sin(n\pi x) = 0.$$

Þessar jöfnur segja okkur að  $T_n$  sé lausnin á verkefninu

$$\begin{cases} T_n''(t) + 2T_n'(t) + n^2\pi T_n(t) = 0, \\ T_n(0) = b_n, \quad T_n'(0) = 0. \end{cases}$$

Kennijafna þessarar afleiðujöfnu er  $\lambda^2 + 2\lambda + n^2\pi^2 = 0$  og núllstöðvarnar eru  $-1 \pm i\omega_n$ ,  $\omega_n = \sqrt{n^2\pi^2 - 1}$ . Lausnin er því af gerðinni

$$T_n(t) = C_n e^{-t} \cos(\omega_n t) + D_n e^{-t} \sin(\omega_n t).$$

Jaðarskilyrðin gefa nú

$$b_n = T_n(0) = C_n, \quad 0 = T_n'(0) = -C_n + D_n \omega_n.$$

Út úr þessum jöfnum leysum við  $C_n = b_n$  og  $D_n = b_n/\omega_n$  og fáum svarið

$$u(x, t) = \frac{8e^{-t}}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \left( \cos(\omega_{2k+1} t) + \frac{\sin(\omega_{2k+1} t)}{\omega_{2k+1}} \right) \sin((2k+1)\pi x).$$

## 9.2 Eigingildisverkefni af Sturm–Liouville–gerð

**9.2.2.** Við tökum fyrir þrjú tilfelli:

(i)  $\lambda = \beta^2 > 0$ . Þá er almenn lausn jöfnunnar  $u(x) = C \cos \beta x + D \sin \beta x$ . Jaðarskilyrðin gefa síðan

$$0 = u'(0) + u(0) = D\beta + C,$$

$$0 = u'(1) - u(1) = -C\beta \sin \beta + D\beta \cos \beta - C \cos \beta - D \sin \beta.$$

Eyðum  $D$  úr seinni jöfnunni með því að nota þá fyrri

$$-C\beta \sin \beta - C \cos \beta - C \cos \beta + \frac{C}{\beta} \sin \beta = 0$$

stytum  $C$  út og tökum saman liði

$$\left( \frac{1}{\beta} - \beta \right) \sin \beta = 2 \cos \beta,$$

og þar með höfum við jöfnuna fyrir eigingildin

$$\tan \beta = \frac{2\beta}{1 - \beta^2}.$$

Við fáum óendanlega runu  $\beta_n$ ,  $(n - 1/2)\pi < \beta_n < n\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$  af lausnum

(ii)  $\lambda = 0$ . Í þessu tilfalli er almenn lausn jöfnunnar  $u(x) = C + Dx$  og Jaðarskilyrðin segja okkur að  $\lambda = 0$  sé ekki eigingildi, því

$$0 = u'(0) + u(0) = D + C \quad \text{og} \quad 0 = u'(1) - u(1) = D - C \quad \text{gefur} \quad C = D = 0.$$

(iii)  $\lambda = -\beta^2 < 0$ . Hér er almenn lausn jöfnunnar  $u(x) = C \cosh \beta x + D \sinh \beta x$  og jaðarskilyrðin segja okkur

$$\begin{aligned} 0 &= u'(0) + u(0) = D\beta + C, \\ 0 &= u'(1) - u(1) = C\beta \sinh \beta + D\beta \cosh \beta - C \cosh \beta - D \sinh \beta. \end{aligned}$$

Eyðum  $D$  úr seinni jöfnunni með því að nota þá fyrri

$$C\beta \sinh \beta - C \cosh \beta - C \cosh \beta + \frac{C}{\beta} \sinh \beta = 0$$

styttum  $C$  út og tökum saman liði

$$\left(\frac{1}{\beta} + \beta\right) \sinh \beta = 2 \cosh \beta,$$

og þar með höfum við jöfnuna fyrir eigingildin

$$\tanh \beta = \frac{2\beta}{1 + \beta^2}.$$

Þessi jafna hefur nákvæmlega eina lausn  $\beta_0$  og við höfum því eitt neikvætt eigingildi.

## 11.2 Heildi yfir einingarringinn

11.2.1. Táknum heildið með  $I$  og umskrifum það yfir í vegheildi, þar sem  $\gamma$  táknar einingarringinn

$$\begin{aligned} I &= \int_{\gamma} \frac{1}{a^2 + (z^2 - 1)^2 / (2iz)^2} \cdot \frac{dz}{iz} \\ &= \int_{\gamma} \frac{-4z/i}{(z^2 - 1)^2 - 4a^2 z^2} dz \\ &= \int_{\gamma} \frac{-4z/i}{z^4 - 2(1 + 2a^2)z^2 + 1} dz \end{aligned}$$

Nefnarinn í síðasta heildisstofninum hefur fjórar ólíkar núllstöðvar og þær uppfylla

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= (1 + 2a^2) \pm ((1 + 2a^2)^2 - 1)^{1/2} \\ &= (1 + 2a^2) \pm (4a^2 + 4a^4)^{1/2} \\ &= (1 + 2a^2) \pm 2a(1 + a^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Greinilegt er að núllstöðvarnar  $\alpha$ , sem hafa + milli liðanna í þessari formúlu, eru utan einingarskífunnar  $S(0, 1)$ , en hinar tvær sem hafa - milli liðanna eru innan hans. Við reiknum nú leifina út

$$\begin{aligned} 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{-4z/i}{z^4 - 2(1 + 2a^2)z^2 + 1}, \alpha \right) &= \frac{-8\pi z}{4z^3 - 4(1 + 2a^2)z} \Big|_{z=\alpha} \\ &= \frac{2\pi}{(1 + 2a^2) - \alpha^2} = \frac{2\pi}{2a(1 + a^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Leifin er sem sagt sú sama í báðum punktunum, svo við fáum

$$I = 2\pi i \sum_{\alpha \in S(0,1)} \operatorname{Res} \left( \frac{-4z/i}{z^4 - 2(1 + 2a^2)z^2 + 1}, \alpha \right) = \frac{2\pi}{a(1 + a^2)^{1/2}}.$$

## 11.4 Útreikningur á Fourier-myndum

11.4.1. b) Fallið  $f$  er jafnstætt og sama gildir um  $\widehat{f}$ . Okkur dugir því að reikna  $\widehat{f}(\xi)$  fyrir  $\xi \leq 0$ . Við höfum

$$\left| \int_{\gamma_r} e^{-iz\xi} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi r}{r^6 - 1} \rightarrow 0 \quad \text{ef} \quad r \rightarrow +\infty,$$

og þar með er

$$\widehat{f}(\xi) = 2\pi i \sum_{\alpha \in H_+} \text{Res} \left( \frac{e^{-iz\xi}}{1+z^6}, \alpha \right) = 2\pi i \sum_{\alpha \in H_+} \frac{e^{-i\alpha\xi}}{6\alpha^5}.$$

Fallið  $f$  hefur þrjú einföld skaut í efra hálfplaninu,  $\alpha_1 = i$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$  og  $\alpha_3 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i)$ . Við athugum að þetta eru sjöttu rætur af  $-1$ , svo  $1/\alpha^5 = -\alpha$ , og það gefur

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \frac{\pi i}{3} \left( -ie^\xi - \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)e^{-\frac{i}{2}(\sqrt{3}+i)\xi} - \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i)e^{-\frac{i}{2}(-\sqrt{3}+i)\xi} \right) \\ &= \frac{\pi}{3} \left( e^\xi + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i)e^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)\xi} + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)e^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)\xi} \right) \\ &= \frac{\pi}{3} \left( e^\xi + e^{\xi/2} (\cos(\sqrt{3}\xi/2) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\xi/2)) \right). \end{aligned}$$

Þessi formúla gildir um  $\xi \leq 0$  og við vitum að  $\widehat{f}$  er jafnstætt fall. Formúlan í svarinu fæst nú ef við skiptum á  $\xi$  og  $-|\xi|$  í síðustu formúlunni fyrir  $\widehat{f}$ .

## 11.5 Útreikningur á andhverfum Laplace-myndum

11.5.1. Green-fallið er gefið sem  $G(t, \tau) = g(t - \tau)$ , þar sem fallið  $g$  uppfyllir  $\mathcal{L}\{g\}(\zeta) = 1/P(\zeta)$  og  $P$  er kennimargliða virkjans

$$P(\zeta) = \zeta^4 - 2\zeta^3 + 2\zeta^2 - 2\zeta + 1 = (\zeta - 1)^2(\zeta - i)(\zeta + i).$$

Við getum nú notað leifaformúluna

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{\alpha=1, i, -i} \text{Res} \left( \frac{e^{\zeta t}}{(\zeta - 1)^2(\zeta - i)(\zeta + i)}, \alpha \right) \\ &= \frac{d}{d\zeta} \frac{e^{\zeta t}}{(\zeta - i)(\zeta + i)} \Big|_{\zeta=1} + \frac{e^{it}}{(i - 1)^2(2i)} + \frac{e^{-it}}{(-i - 1)^2(-2i)} \\ &= \frac{te^{\zeta t}}{\zeta^2 + 1} \Big|_{\zeta=1} + \frac{e^{\zeta t}(-2\zeta)}{(\zeta^2 + 1)^2} \Big|_{\zeta=1} + \frac{e^{it}}{4} + \frac{e^{-it}}{4} \\ &= \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}\cos t. \end{aligned}$$

11.5.2. c) Við finnum fullkomna þáttun nefnarans og teljarans í brotinu

$$F(\zeta) = \frac{(\zeta - 1)(\zeta - (1 + i))}{(\zeta - 1)(\zeta - 2)^2(\zeta - (1 + i))(\zeta - (1 - i))}.$$

Við sjáum að sérstöðupunkturarnir eru  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\alpha = 1 + i$  og  $\alpha = 1 - i$ . Við fullstyttem brotið og þá stendur eftir

$$F(\zeta) = \frac{1}{(\zeta - 2)^2(\zeta - (1 - i))}.$$

Þetta segir okkur að sérstöðupunkturarnir  $\alpha = 1$  og  $\alpha = 1 + i$  séu afmáanlegir,  $\alpha = 1 - i$  sé skaut af stigi 1 og  $\alpha = 2$  sé skaut af stigi 2. Andhverfa Laplace-myndin er

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{Res}\left(\frac{e^{\zeta t}}{(\zeta - 2)^2(\zeta - (1 - i))}, 1 - i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^{\zeta t}}{(\zeta - 2)^2(\zeta - (1 - i))}, 2\right) \\ &= \frac{e^{(1-i)t}}{(1 - i - 2)^2} + \frac{d}{d\zeta}\left(\frac{e^{\zeta t}}{(\zeta - (1 - i))}\right)\Bigg|_{\zeta=2} \\ &= \frac{e^{(1-i)t}}{2i} + \frac{te^{2t}}{1 + i} - \frac{e^{2t}}{(1 + i)^2} \\ &= -\frac{i}{2}e^{(1-i)t} + \frac{(1-i)}{2}te^{2t} - \frac{i}{2}e^{2t}. \end{aligned}$$

**11.5.3.** c) Green-fallið er gefið sem  $G(t, \tau) = g(t - \tau)$ , þar sem fallið  $g$  uppfyllir  $\mathcal{L}\{g\}(\zeta) = 1/P(\zeta)$  og  $P$  er kennimargliða virkjans

$$P(\zeta) = \zeta^4 - 2\zeta^3 + 2\zeta^2 - 2\zeta + 1 = (\zeta - 1)^2(\zeta - i)(\zeta + i).$$

Við getum nú notað leifaformúluna

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{\alpha=1, i, -i} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{\zeta t}}{(\zeta - 1)^2(\zeta - i)(\zeta + i)}, \alpha\right) \\ &= \frac{d}{d\zeta} \frac{e^{\zeta t}}{(\zeta - i)(\zeta + i)}\Bigg|_{\zeta=1} + \frac{e^{it}}{(i - 1)^2(2i)} + \frac{e^{-it}}{(-i - 1)^2(-2i)} \\ &= \frac{te^{\zeta t}}{\zeta^2 + 1}\Bigg|_{\zeta=1} + \frac{e^{\zeta t}(-2\zeta)}{(\zeta^2 + 1)^2}\Bigg|_{\zeta=1} + \frac{e^{it}}{4} + \frac{e^{-it}}{4} \\ &= \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}\cos t. \end{aligned}$$

## 13.1 Lausnir úr kafla 13

**13.1.8.** Fourier-röðin hefur stuðlana

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 \sin(n\pi x) \varphi(x) dx = 2 \int_0^{1/2} \sin(n\pi x) 2x dx + 2 \int_{1/2}^1 \sin(n\pi x) (2 - 2x) dx \\ &= 2 \left[ \frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi} 2x \right]_{x=0}^{1/2} + 4 \int_0^{1/2} \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} dx \\ &\quad + 2 \left[ \frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi} (2 - 2x) \right]_{x=1/2}^1 - 4 \int_{1/2}^1 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} dx \\ &= -2 \frac{\cos(n\pi/2)}{n\pi} + 4 \left[ \frac{\sin(n\pi x)}{n^2\pi^2} \right]_{x=0}^{1/2} + 2 \frac{\cos(n\pi/2)}{n\pi} - 4 \left[ \frac{\sin(n\pi x)}{n^2\pi^2} \right]_{x=1/2}^1 \\ &= \begin{cases} \frac{8(-1)^k}{n^2\pi^2}, & n = 2k + 1 \text{ oddatala,} \\ 0, & n \text{ slétt tala.} \end{cases} \end{aligned}$$

Skrifum nú lausnina  $u(x, t)$  sem Fourier-röð  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(n\pi x)$ , stingum henni síðan inn í hlutafleiðujöfnuna

$$\partial_t^2 u + 2\partial_t u - \partial_x^2 u = \sum_{n=1}^{\infty} \left( T_n''(t) + 2T_n'(t) + n^2\pi^2 T_n(t) \right) \sin(n\pi x) = 0$$

og athugum upphafsskilyrðin

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x),$$

$$\partial_t u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \sin(n\pi x) = 0.$$

Þessar jöfnur segja okkur að  $T_n$  sé lausnin á verkefninu

$$\begin{cases} T_n''(t) + 2T_n'(t) + n^2\pi^2 T_n(t) = 0, \\ T_n(0) = b_n, \quad T_n'(0) = 0. \end{cases}$$

Kennijafna þessarar afleiðujöfnu er  $\lambda^2 + 2\lambda + n^2\pi^2 = 0$  og núllstöðvarnar eru  $-1 \pm i\sqrt{n^2\pi^2 - 1}$ . Lausnin er því af gerðinni

$$T_n(t) = C_n e^{-t} \cos(\sqrt{n^2\pi^2 - 1}t) + D_n e^{-t} \sin(\sqrt{n^2\pi^2 - 1}t).$$

Jaðarskilyrðin gefa nú

$$b_n = T_n(0) = C_n, \quad 0 = T_n'(0) = -C_n + D_n \sqrt{n^2\pi^2 - 1}.$$

Út úr þessum jöfnum leysum við  $C_n = b_n$  og  $D_n = b_n/\sqrt{n^2\pi^2 - 1}$  og fáum svarið

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} e^{-t} \times$$

$$\left( \cos(\sqrt{(2k+1)^2\pi^2 - 1}t) + \frac{\sin(\sqrt{(2k+1)^2\pi^2 - 1}t)}{\sqrt{(2k+1)^2\pi^2 - 1}} \right) \sin((2k+1)\pi x).$$

**13.7.1.** Fyrst þurfum við að leysa eigingildisverkefnið

$$(1) \quad \begin{cases} -c^2 v'' = \lambda v, & x \in [0, L], \\ v(0) = v'(L) = 0. \end{cases}$$

Það er auðvelt að sannfæra sig um að ekki eru til nein eigingildi  $\lambda \leq 0$ . Við leitum því einungis að jákvæðum eigingildum og skrifum  $\lambda/c^2 = \beta^2$ ,  $\beta > 0$ . Almenn lausn jöfnunnar (1) er

$$v(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x),$$

og jaðarskilyrðin gefa

$$0 = v(0) = A, \quad 0 = v'(L) = B\beta \cos(\beta L),$$

og þar með er  $\beta = (n + \frac{1}{2})\pi/L$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Eigingildin og tilsvaramandi eiginföll eru

$$\lambda_n = c^2(n + \frac{1}{2})^2\pi^2/L^2, \quad u_n(x) = \sin((n + \frac{1}{2})\pi x/L), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Við getum valið  $\rho = 1$  og höfum því

$$\begin{aligned} \int_0^L u_n(x)^2 dx &= \int_0^L \sin^2((n + \frac{1}{2})\pi x/L) dx \\ &= \int_0^L \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos((2n + 1)\pi x/L)\right) dx = L/2 \end{aligned}$$

Öll eigingildin eru jákvæð og því fáum við

$$c_n(t) = \varphi_n \cos\left((n + \frac{1}{2})\pi ct/L\right) + \frac{\psi_n}{(n + \frac{1}{2})\pi c/L} \sin\left((n + \frac{1}{2})\pi ct/L\right) \\ + \int_0^t \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})\pi c(t - \tau)/L\right)}{(n + \frac{1}{2})\pi c/L} f_n(\tau) d\tau.$$

**13.7.6.** Þetta er Euler-jafna, svo við leitum að lausn af gerðinni  $v(x) = (1+x)^\alpha$ . Við fáum þá

$$-(1+x)^2 v'' - \lambda v = -(1+x)^2 \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} - \lambda(1+x)^\alpha = 0,$$

sem segir okkur að  $\alpha$  verði að uppfylla  $\alpha^2 - \alpha + \lambda = 0$  og við fáum lausnina

$$\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}, & \lambda < \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2}, & \lambda = \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2} \pm i\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}, & \lambda > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Við þurfum því að takast á við þrjú tilfelli:

(i)  $\lambda < \frac{1}{4}$ ,  $\gamma = \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}$ . Almenn lausn jöfnunnar er

$$v(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} (C(1+x)^\gamma + D(1+x)^{-\gamma}).$$

Jaðarskilyrðin gefa  $v(0) = C + D = 0$ ,  $v(1) = 2^{\frac{1}{2}} (C2^\gamma + D2^{-\gamma}) = 0$ , og þar með verða stuðlarnir  $C$  og  $D$  að uppfylla jöfnuhneppið

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2^\gamma & 2^{-\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ákveða stuðlafylkisins er frábrugðin 0 og því er  $C = D = 0$  eina lausnin. Við höfum því sannfærst um að ekki er til neitt eigingildi  $\lambda < \frac{1}{4}$ .

(ii)  $\lambda = \frac{1}{4}$ . Almenn lausn er

$$v(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} (C + D \log(1+x))$$

og jaðarskilyrðin gefa  $v(0) = C = 0$  og  $v(1) = D \ln 2 = 0$ . Þar með er  $C = D = 0$  og ekkert eigingildi fæst heldur í þessu tilfelli.

(iii)  $\lambda > \frac{1}{4}$ ,  $\gamma = \sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}$ . Almenn lausn jöfnunnar er nú

$$v(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} (C(1+x)^{i\gamma} + D(1+x)^{-i\gamma}).$$

Jaðarskilyrðin gefa

$$v(0) = C + D = 0, \quad D = -C, \\ v(1) = 2^{\frac{1}{2}} C (2^{i\gamma} - 2^{-i\gamma}) = C 2^{\frac{1}{2}} 2i \sin(\gamma \ln 2) = 0.$$

Við fáum því að  $\gamma$  verður að uppfylla  $\gamma = n\pi/\ln 2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Eigingildin eru því

$$\lambda_n = \frac{1}{4} + \left(\frac{n\pi}{\ln 2}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

og tilsvareandi eiginföll eru

$$u_n(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} \sin(n\pi \ln(1+x)/\ln 2).$$

Athugið að hér höfum við að  $(1+x)^{i\gamma} - (1+x)^{-i\gamma} = 2i \sin(\gamma \ln(1+x))$ . Nú þurfum við að ákvarða

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_n(x)^2 \varrho(x) dx &= \int_0^1 (1+x) \sin^2(n\pi \ln(1+x)/\ln 2) \frac{1}{(1+x)^2} dx \\ &= \int_0^1 \sin^2(n\pi \ln(1+x)/\ln 2) \frac{1}{(1+x)} dx = \ln 2 \int_0^1 \sin^2(n\pi \xi) d\xi = \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Öll eigingildin eru jákvæð og því verður niðurstaðan

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) (1+x)^{\frac{1}{2}} \sin(n\pi \ln(1+x)/\ln 2), \\ c_n(t) &= \varphi_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin(\sqrt{\lambda_n} t) + \int_0^t \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}(t-\tau))}{\sqrt{\lambda_n}} f_n(\tau) d\tau, \\ \lambda_n &= \frac{1}{4} + \left(\frac{n\pi}{\ln 2}\right)^2, \\ \varphi_n &= \frac{2}{\ln 2} \int_0^1 \varphi(x) \sin(n\pi \ln(1+x)/\ln 2) (1+x)^{-\frac{3}{2}} dx, \\ \psi_n &= \frac{2}{\ln 2} \int_0^1 \psi(x) \sin(n\pi \ln(1+x)/\ln 2) (1+x)^{-\frac{3}{2}} dx, \\ f_n(t) &= \frac{2}{\ln 2} \int_0^1 f(x, t) \sin(n\pi \ln(1+x)/\ln 2) (1+x)^{-\frac{3}{2}} dx. \end{aligned}$$

## 15.4 Lausnir úr kafla 15

15.4.2. Eftir Fourier-ummyndun verður verkefnið

$$\begin{cases} -\xi^2 \widehat{u}(\xi, y) + 2i\xi \partial_y \widehat{u}(\xi, y) + \partial_y^2 \widehat{u}(\xi, y) = \widehat{f}(\xi, y), & \xi \in \mathbb{R} \ y > 0, \\ \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{g}(\xi), \quad \partial_y \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{h}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Við höfum hér annars stigs afleiðujöfnu í  $y$ . Virkinn er  $D_y^2 + 2i\xi D_y - \xi^2$ . Kennijafnan er  $\lambda^2 + 2i\xi\lambda - \xi^2 = (\lambda + i\xi)^2 = 0$  og hún hefur eina núllstöð  $\lambda = -i\xi$ . Lausnir óhliðruðu jöfnunnar eru samantektir  $e^{-i\xi y}$  og  $ye^{-i\xi y}$  og Green-fallið er  $G(y, \eta) = (y - \eta)e^{-i\xi(y-\eta)}$ . Þar með er

$$\widehat{u}(\xi, y) = A(\xi)e^{-i\xi y} + B(\xi)ye^{-i\xi y} + \int_0^y (y - \eta)e^{-i\xi(y-\eta)} \widehat{f}(\xi, \eta) d\eta.$$

Upphafsskilyrðin segja okkur að

$$\widehat{u}(\xi, 0) = A(\xi) = \widehat{g}(\xi), \quad \partial_y \widehat{u}(\xi, 0) = -i\xi A(\xi) + B(\xi) = \widehat{h}(\xi),$$

og þar með er

$$\widehat{u}(\xi, y) = e^{-i\xi y} \widehat{g}(\xi) + ye^{-i\xi y} (\widehat{h}(\xi) + i\xi \widehat{g}(\xi)) + \int_0^y (y - \eta)e^{-i\xi(y-\eta)} \widehat{f}(\xi, \eta) d\eta.$$

Við vitum að  $i\xi \widehat{g}(\xi) = \mathcal{F}\{g'\}(\xi)$ . Með því að beita andhverfuformúlu Fourier's fáum við því

$$u(x, y) = g(x - y) + y(h(x - y) + g'(x - y)) + \int_0^y (y - \eta)f(x - y + \eta, \eta) d\eta.$$