# Kafli 18

# VEIKAR LAUSNIR Á HLUTAFLEIÐUJÖFNUM OG DREIFIFÖLL

## 18.1 Inngangur

Í greinum 2.8, 6.9 og 7.6 kynntumst við nokkrum undirstöðuhugtökum um dreififöll á rauntalnalínunni $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$. Auðvelt er að alhæfa þau hugtök yfir á rúmið $\mathbb{R}^n$ í hærri víddum. Reyndar eru dreififöllin mun mikilvægari við úrlausn á hlutafleiðujöfnum en við úrlausn á venjulegum afleiðujöfnum. Í þessum stutta kafla kynnumst við örlítið veikum hlutafleiðum, veikum lausnum á hlutafleiðujöfnum og grunnlausnum á hlutafleiðujöfnum. Einnig sjáum við eðlisfræðilega túlkun á Green-föllum fyrir Laplace-virkjann.

## 18.2 Veik markgildi og $\delta$-föll Diracs

Í grein 2.8 sáum við fyrst skilgreiningu og túlkun á Dirac-fallinu $\delta_a$. Það á sér hliðstæða skilgreiningu í hærri víddum.

**Skilgreining 18.2.1** Látum $a \in \mathbb{R}^n$ og skilgreinum $\delta_a$ með

$$\delta_a(\varphi) = \varphi(a), \tag{18.2.1}$$

þar sem $\varphi$ er samfellt í einhverri grennd um $a$. Við getum litið á $\delta_a$ sem línulega vörpun $C(X) \to \mathbb{C}$ á sérhverju opnu hlutmengi $X$ í $\mathbb{R}^n$ sem inniheldur $a$. Vörpunin $\delta_a$ nefnist *$\delta$-fall Diracs* í punktinum $a$ eða *Dirac-delta-fall* í punktinum $a$. Ef $a = 0$, þá skrifum við aðeins $\delta$ í stað $\delta_0$. $\square$

Dirac-fallið $\delta_a$ er oft skilgreint í bókum, sem fallið á $\mathbb{R}^n$ sem uppfyllir

$$\delta_a(x) = \begin{cases} +\infty, & x = a, \\ 0, & x \neq a, \end{cases} \qquad \text{og} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \delta_a(x)\, dx = 1. \tag{18.2.2}$$

Alveg eins og í einvíða tilfellinu fá þessi skilyrði ekki staðist stærðfræðilega, því fall sem skilgreint er með fyrri formúlunni hefur heildi jafnt 0, sem stangast á við síðara skilyrðið. Þess vegna er $\delta$-fall ekki fall í venjulegum skilningi og við verðum að notast við skilgreininguna 18.2.1. Hins vegar er gott að muna eftir skilyrðunum (18.2.2) þegar verið er að framkvæma og túlka útreikninga.

Hugtakið dreififall er skilgreint eins og í einvíða tilfellinu, en áður en við getum sett skilgreininguna fram þurfum við að innleiða nokkur ný hugtök. Ef $\varphi$ er samfellt fall á opnu hlutmengi $X$ í $\mathbb{R}^n$, þá nefnist minnsta lokaða mengi sem inniheldur $\{x \in X; \varphi(x) \neq 0\}$ *stoð* fallsins $\varphi$ og hún er táknuð með $\operatorname{supp} \varphi$. Hlutmengi af $\mathbb{R}^n$ sem er bæði lokað og takmarkað er sagt vera *þjappað*. Við látum $C_0^k(X)$, þar sem $0 \le k \le \infty$, tákna mengi allra $k$ sinnum samfellt deildanlegra falla á $\mathbb{R}^n$ sem hafa þjappaða stoð í $X$. Þetta er línulegt hlutrúm í $C^k(\mathbb{R}^n)$. Rúmið $C_0^\infty(X)$ er oft táknað með $\mathcal{D}(X)$ og stök þess eru oft nefnd *prófunarföll.*

Nú skulum við líta á fall $f$ sem er heildanlegt á sérhverju þjöppuðu hlutmengi af $X$. Það skilgreinir á eðlilegan hátt línulega vörpun

$$u_f : C_0^\infty(X) \to \mathbb{C}, \qquad u_f(\varphi) = \int_X f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{18.2.3}$$

Athugið að einungis er heildað yfir þjappað hlutmengi af $X$, því sérhvert fall $\varphi$ í $C_0^\infty(X)$ er 0 alls staðar nema á þjöppuðu hlutmengi. Ef við skilgreinum margfeldið $f(x)\varphi(x)$ sem 0 fyrir utan $\operatorname{supp}\varphi$, þá breytist heildið ekki þó við skrifum $\int_{\mathbb{R}^n}$ í stað $\int_X$. Nú kemur skilgreiningin óbreytt frá einvíða tilfellinu:

**Skilgreining 18.2.2** Látum $X$ vera opið hlutmengi af $\mathbb{R}^n$. Línuleg vörpun

$$u : C_0^\infty(X) \to \mathbb{C}$$

nefnist *dreififall* á $X$ ef hún er samfelld í þeim skilningi að

$$u(\varphi_j) \to u(\varphi), \qquad j \to +\infty, \tag{18.2.4}$$

fyrir sérhverja runu $\varphi_j$ í $C_0^\infty(X)$, þar sem föllin $\varphi_j$ hafa öll stoð í sama þjappaða hlutmenginu $K$ í $X$ og um sérhvern hlutafleiðuvirkja $\partial^\alpha$ gildir að $\partial^\alpha\varphi_j \to \partial^\alpha\varphi$ í jöfnum mæli á $\mathbb{R}^n$. Mengi allra dreififalla á $X$ táknum við með $\mathcal{D}'(X)$. Við skrifum einnig $\langle u, \varphi\rangle$ í staðinn fyrir $u(\varphi)$. □

Dirac-föll koma oft fyrir sem veik markgildi af föllum, þar sem hugtakið *veik samleitni* er skilgreint eins og í einni vídd:

**Skilgreining 18.2.3** Látum $u_j$ vera runu í $\mathcal{D}'(X)$. Við segjum að $u_j$ stefni á $u \in \mathcal{D}'(X)$, og táknum það með $u_j \to u$ og $\lim_{j\to+\infty} u_j = u$, ef

$$\lim_{j\to+\infty} u_j(\varphi) = u(\varphi), \qquad \varphi \in C_0^\infty(X). \tag{18.2.5}$$

Ef öll dreififöllin $u_j$ eru af gerðinni $u_{f_j}$, þar sem $f_j$ er heildanlegt á sérhverju þjöppuðu hlutmengi af $X$, þá segjum við að $f_j$ stefni á $u$ *í veikum skilningi* eða að $f_j$ *stefni á $u$ í skilningi dreififalla.* Þetta þýðir að

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\varphi(x)\,dx \to u(\varphi), \qquad \varphi \in C_0^\infty(X), \tag{18.2.6}$$

og við táknum þessa samleitni einnig með $f_j \to u$ og $\lim_{j\to+\infty} f_j = u$. □

Ef $u_\varepsilon$ eru dreififöll sem háð eru breytunni $\varepsilon \in \mathbb{R}$ þá skilgreinum við $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon$ með hliðstæðum hætti. Sama er að segja um $\lim_{t\to+\infty} u_t$ ef $u_t$ eru dreififöll sem háð eru samfelldu breytunni $t$.

**Setning 18.2.4** *Ef $f_\varepsilon \to \delta_0$, þá gildir*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon * \varphi(x) = \varphi(x), \qquad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

□

*Sönnun:* Við tökum $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ og skilgreinum $\psi_x(y) = \varphi(x-y)$. Þá gildir

$$\begin{aligned} f_\varepsilon * \varphi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x-y)\varphi(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(y)\varphi(x-y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(y)\psi_x(y)\,dy \to \psi_x(0) = \varphi(x). \end{aligned}$$

■

Auðvelt er að finna föll sem stefna á $\delta$-föll í veikum skilningi:

**Setning 18.2.5** *Látum $f$ vera heildanlegt fall á $\mathbb{R}^n$ með heildi jafnt 1 og setjum $f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} f(x/\varepsilon)$. Þá stefnir $f_\varepsilon$ á $\delta_0$ í veikum skilningi ef $\varepsilon \to 0$.* □

*Sönnun:* Ef $\varphi$ er takmarkað samfellt fall á $\mathbb{R}^n$, þá er

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} f(x/\varepsilon)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(\varepsilon y)\,dy$$
$$\to \varphi(0)\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,dy = \varphi(0) = \delta_0(\varphi).$$

■

**Sýnidæmi 18.2.6** (*Varmaleiðnikjarninn*). Í grein 16.2 sáum við hvernig varmaleiðnijafnan $\partial_t u - \kappa\Delta u = f$ er leyst á $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ með upphafsgildum $u(x,0) = \varphi(x)$ fyrir $x \in \mathbb{R}^n$. Þar fengum við að lausnin er gefin með földun $u(x,t) = E_t * \varphi + E * f$, þar sem $E$ táknar varmaleiðnikjarnann.

$$E(x,t) = E_t(x) = H(t)\big(4\pi\kappa t\big)^{-n/2} e^{-x^2/4\kappa t}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ (x,t) \neq (0,0).$$

Við sjáum nú að ef við tökum $f(x) = \big(4\pi\big)^{-n/2} e^{-x^2/4}$ og setjum $\varepsilon = \sqrt{\kappa t}$, þá gefur setning 18.2.5 að

$$E_t \to \delta_0, \qquad t \to 0+.$$

□

**Sýnidæmi 18.2.7** (*Poisson-kjarninn á efra hálfplaninu*). Annað áhugavert val á föllum sem stefna á $\delta$-fallið er Poisson-kjarninn fyrir efra hálfplanið, sem kom fyrir í lausnarformúlunni fyrir Dirichlet-verkefnið á efra hálfplaninu í grein 17.4,

$$P_{\mathbb{H}_+}(x,y) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Ef við setjum nú $f(x) = 1/\pi(x^2+1)$, þá uppfyllir $f$ skilyrðin í setningu 18.2.5 og $f_\varepsilon(x) = P_{\mathbb{H}_+}(x,\varepsilon)$. Þar með fáum við

$$P_{\mathbb{H}_+}(\cdot,y) \to \delta_0, \qquad y \to 0+.$$

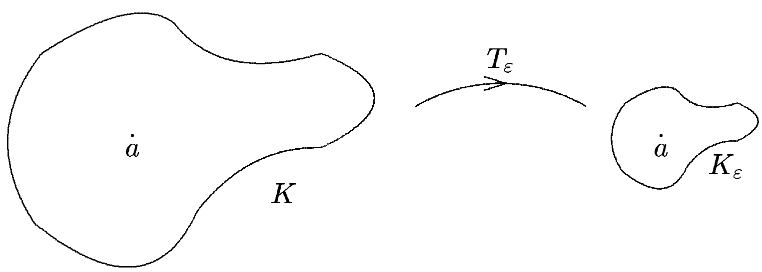
□

Snúum okkur nú að eðlisfræðilegum líkönum, þar sem $\delta$-föll koma fyrir á náttúrulegan hátt:

**Sýnidæmi 18.2.8** (*Massaþéttleiki, þyngdarmætti*). Lítum á hlut með massa $M$ í þrívíðu rúmi á takmörkuðu svæði $K$ og látum $\varrho$ vera massaþéttleika hans. Þá er $\varrho(x) = 0$ ef $x = (x_1, x_2, x_3) \notin K$ og massi hlutarins er

$$M = \int_K \varrho(x)\,dx.$$

Hugsum okkur nú að $a$ sé punktur í $K$ og að massinn skreppi saman þannig að ögn í punkti $x$ flyst yfir í punktinn $y = T_\varepsilon(x) = a + \varepsilon(x-a)$.




Mynd 18.1. Vörpunin $T_\varepsilon$.

Massaþéttleiki hinnar nýju massadreifingar í $K_\varepsilon = \{y = a + \varepsilon(x-a); x \in K\}$ er

$$\varrho_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-3}\varrho(a + (y-a)/\varepsilon).$$

Athugið að stuðullinn $\varepsilon^{-3}$ er til kominn vegna þess að vörpunin $T_\varepsilon$ breytir rúmmáli í hlutfallinu $\varepsilon^3$ og andhvefa hennar breytir rúmmáli í hlutfallinu $\varepsilon^{-3}$. Nú fáum við að

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \varrho_\varepsilon(y)\,dy &= \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon^{-3}\varrho(a+(y-a)/\varepsilon)\,dy = \int_{\mathbb{R}^3} \varrho(x)\,dx = M,\\
\int_{\mathbb{R}^3} \varrho_\varepsilon(y)\varphi(y)\,dy &= \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon^{-3}\varrho(a+(y-a)/\varepsilon)\varphi(y)\,dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \varrho(x)\varphi(a+\varepsilon(x-a))\,dx \to \varphi(a)\int_{\mathbb{R}^3}\varrho(x)\,dx = M\delta_a(\varphi).
\end{aligned}$$

Þessi útreikningur segir okkur að massaþéttleikinn $\varrho_\varepsilon$ stefni á $M\delta_a$ í veikum skilningi. Við túlkum því $\delta_a$ sem massaþéttleika einingarpunktmassa í punktinum $a$.

Lítum nú á þyngdarmættið $u_\varepsilon$ sem massinn skapar í rúminu. Samkvæmt þyngdarlögmáli Newtons er það gefið með formúlunni

$$u_\varepsilon(x) = -G\int_{K_\varepsilon} \frac{\varrho_\varepsilon(y)}{4\pi|x-y|}\,dy, \tag{18.2.7}$$

þar sem $G$ táknar þyngdarfastann. Við getum skrifað þessa formúlu sem földunarheildi

$$u_\varepsilon(x) = G\big(E * \varrho_\varepsilon\big)(x), \tag{18.2.8}$$

þar sem

$$E(x) = \frac{-1}{4\pi|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}, \tag{18.2.9}$$

táknar *Newton-mættið.* Ef við látum $\varepsilon \to 0$, þá fáum við

$$u_\varepsilon(x) \to \frac{-GM}{4\pi|x-a|} = GME(x-a). \tag{18.2.10}$$

Við getum því litið á Newton-mættið sem þyngdarmættið, sem punktmassi $M = 1/G$ í upphafspunkti skapar í rúminu. □

**Sýnidæmi 18.2.9** (*Hleðsluþéttleiki, rafstöðumætti*). Nú skulum við líta á fallið $\varrho$ í síðasta dæmi sem hleðsluþéttleika í $K$ með heildarhleðsluna $Q$. Með nákvæmlega sömu rökum og áður fáum við þá að $\varrho_\varepsilon \to Q\delta_a$. Við túlkum því $\delta_a$ sem hleðsluþéttleika einingarpunkthleðslu í punktinum $a$.

Mætti rafstöðusviðsins sem hleðsludreifingin skapar í rúminu er gefin með

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{K_\varepsilon} \frac{\varrho_\varepsilon(y)}{4\pi|x-y|}\,dy = -\frac{1}{\epsilon_0}E * \varrho_\varepsilon(x), \tag{18.2.11}$$

þar sem $E$ táknar Newton-mættið eins og áður og $\epsilon_0$ er rafsvörunarstuðullinn í tómarúmi. Ef við látum $\varepsilon \to 0$, þá fáum við

$$u_\varepsilon(x) \to \frac{Q}{\epsilon_0}\cdot\frac{1}{4\pi|x-a|} = -\frac{Q}{\epsilon_0}E(x-a).$$

Við sjáum því að $E$ er rafstöðumættið sem neikvæð hleðsla með styrk $\epsilon_0$ í upphafspunkti hnitakerfisins skapar í rúminu. Í rafstöðufræði kallast $-E(x) = 1/4\pi|x|$ *Coulomb-mætti.* □

## 18.3 Veikar afleiður og grunnlausnir

Látum nú $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ og lítum á dreififallið $u_{\partial_j f}$. Með því að hlutheilda með tilliti til breytistærðarinnar $x_j$, þá fáum við

$$u_{\partial_j f}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j f(x)\varphi(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial_j\varphi(x)\, dx = -u_f(\partial_j\varphi).$$

Nú er ljóst að $\varphi \mapsto -u_f(\partial_j\varphi)$ er línuleg vörpun og að hún skilgreinir dreififall. Ef $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, þá fáum við með ítrekaðri hlutheildun að

$$u_{\partial^\alpha f}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}u_f(\partial^\alpha\varphi). \tag{18.3.1}$$

Þessa formúlu leggjum við til grundvallar á skilgreiningu á afleiðum dreififalla:

**Skilgreining 18.3.1** Látum $u$ vera dreififall á opnu hlutmengi $X$ í $\mathbb{R}^n$. Þá er hlutafleiða þess $\partial_j u$ skilgreind með

$$\partial_j u(\varphi) = -u(\partial_j\varphi), \qquad \varphi \in C_0^\infty(X), \tag{18.3.2}$$

og fyrir sérhvert fjölnúmer $\alpha$ skilgreinum við afleiðuna $\partial^\alpha u$ af $u$ sem dreififallið

$$\partial^\alpha u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}u(\partial^\alpha\varphi), \qquad \varphi \in C_0^\infty(X).$$

Ef $u = u_f$, þar sem fallið $f$ er heildanlegt á sérhverju þjöppuðu hlutmengi af $X$, þá nefnist $\partial^\alpha(u_f)$ *veika $\alpha$ hlutafleiðan* af $f$ eða *$\alpha$ hlutafleiða $f$ í skilningi dreififalla* og við skrifum þá $\partial^\alpha f$ í stað $\partial^\alpha(u_f)$, þegar ekki er um að villast að átt er við veiku hlutafleiðuna. □

Eins og fram hefur komið, þá er veika $\alpha$ hlutafleiðan af $f \in C^k(X)$ ekkert annað en dreififallið sem $\partial^\alpha f$ skilgreinir, þ.e.a.s.

$$\partial^\alpha(u_f) = u_{\partial^\alpha f},$$

og því getum við litið á hlutafleiður dreififalla sem alhæfingu á afleiðum venjulegra falla.

Við skilgreinum síðan hlutafleiðuvirkjann $\partial^\alpha$, en hann úthlutar dreififallinu $u$ hlutafleiðunni $\partial^\alpha u$. Í framhaldi af því getum við síðan skilgreint línulega hlutafleiðuvirkja

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha\partial^\alpha \tag{18.3.3}$$

og myndað afleiðujöfnur fyrir dreififöll

$$P(\partial)u = f, \tag{18.3.4}$$

þar sem $f$ er gefið dreififall. Stuðlarnir $a_\alpha$ geta staðið fyrir tvinntölur eða jafnvel föll í $C^\infty(X)$. *Dreififallalausn* eða *veik lausn* er síðan $u \in \mathcal{D}'(X)$ sem uppfyllir jöfnuna.

**Sýnidæmi 18.3.2** (*Veikar lausnir bylgjujöfnunnar*). Í grein 15.2 sáum við að lausn á bylgjujöfnunni $\partial_t^2 - c^2\partial_x^2 u = 0$ á $\mathbb{R}^2$ er af gerðinni

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct) \tag{18.3.5}$$

og til þess að staðfesta að þetta sé lausn þá þarf að gera ráð fyrir að föllin $f$ og $g$ séu tvisvar samfellt deildanleg. Það kemur í ljós að bylgjujafnan er uppfyllt í veikum skilningi fyrir $u$ af gerðinni (18.3.5), ef við gerum einungis ráð fyrir að föllin $f$ og $g$ séu heildanleg á takmörkuðum bilum. Við skulum nú staðfesta að þetta sé rétt.

Veika afleiðan af $u$ er gefin með

$$\begin{aligned}\langle(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2)u, \varphi\rangle &= \langle u, (\partial_t^2 - c^2\partial_x^2)\varphi\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(x+ct) + g(x-ct)\big)\big(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2\big)\varphi(x,t)\, dxdt,\end{aligned}$$

þar sem $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Nú skiptum við yfir í kennihnit eins og í (15.2.4) og (15.2.5) og setjum $\psi(\xi,\eta) = \varphi(x,t)$. Þá er $\big(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2\big)\varphi(x,t) = -4c^2\partial_\xi\partial_\eta\psi(\xi,\eta)$ samkvæmt (15.2.6). Jacobi-ákveða hnitaskiptanna $(\xi,\eta) \mapsto (x,t)$ er $-1/2c$ og þar með er

$$\begin{aligned}\langle(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2)u, \varphi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(\xi) + g(\eta)\big)\big(-4c^2\partial_\xi\partial_\eta\psi(\xi,\eta)\big)\,\frac{1}{2c}\, d\xi d\eta \\ &= -2c\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_\eta\partial_\xi\psi(\xi,\eta)\, d\eta\, d\xi \\ &\quad - 2c\int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta)\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_\xi\partial_\eta\psi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = 0.\end{aligned}$$

Athugið að hér höfum við notfært okkur að $\psi$ er 0 fyrir utan takmarkað mengi og því er

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_\eta\partial_\xi\psi(\xi,\eta)\, d\eta &= \Big[\partial_\xi\psi(\xi,\eta)\Big]_{\eta\to-\infty}^{\eta\to+\infty} = 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_\xi\partial_\eta\psi(\xi,\eta)\, d\xi &= \Big[\partial_\eta\psi(\xi,\eta)\Big]_{\xi\to-\infty}^{\xi\to+\infty} = 0.\end{aligned}$$

Á mynd 15.1 er útbreiðslu bylgju lýst. Það eru brot í ferlinum, en það kemur ekki að sök, því við tökum lausn í veikum skilningi. ☐

**Skilgreining 18.3.3** Látum $P(\partial)$ vera afleiðuvirkja með fastastuðla. Dreififall $E$ sem uppfyllir jöfnuna

$$P(\partial)E = \delta \tag{18.3.6}$$

nefnist *grunnlausn* afleiðuvirkjans $P(\partial)$. ☐

Grunnlausnir hlutafleiðuvirkja eru mjög mikilvægar vegna þess að með þeim er hægt að ákvarða sérlausnir. Til þess að sjá það skulum við athuga að ef $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, þá er

$$\partial^\alpha u(\varphi) = \langle\partial^\alpha u, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha\varphi\rangle = \langle u, (-\partial)^\alpha\varphi\rangle$$

og þar með er

$$\langle P(\partial)u, \varphi\rangle = \langle\sum a_\alpha\partial^\alpha u, \varphi\rangle = \langle u, \sum a_\alpha\big(-\partial\big)^\alpha\varphi\rangle = \langle u, P(-\partial)\varphi\rangle.$$

Athugum nú að fyrir fall $F$, sem er heildanlegt á þjöppuðum hlutmengjum í $\mathbb{R}^n$ er földunin $F * \varphi$ vel skilgreind ef $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ með formúlunni

$$F * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(y)\varphi(x-y)\, dy$$

og greinilegt er að $F * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, því við megum taka afleiður með tilliti til $x$ undir heildið. Við fáum þá

$$\begin{aligned}P(\partial)\, F * \varphi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} F(y)P(\partial_x)\varphi(x-y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} F(y)P(-\partial_y)\varphi(x-y)\, dy \\ &= \langle u_F, P(-\partial)\varphi(x-\cdot)\rangle \\ &= \langle P(\partial)u_F, \varphi(x-\cdot)\rangle.\end{aligned}$$

Hér táknar $P(-\partial)\varphi(x-\cdot)$ að hlutafleiðuvirkinn $P(-\partial)$ er látinn verka á $\varphi(x-y)$ með tilliti til $y$. Ef dreififallið $E = u_F$ er grunnlausn hlutafleiðuvirkjans $P(\partial)$, þá fáum við

$$P(\partial)\, F * \varphi(x) = \langle P(\partial)u_F, \varphi(x-\cdot)\rangle = \langle \delta, \varphi(x-\cdot)\rangle = \varphi(x).$$

Þar með er $u = F * \varphi$ lausn á hliðruðu jöfnunni $P(\partial)u = \varphi$.

**Skilgreining 18.3.4** Ef $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ og $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, þá skilgreinum við földun $u$ og $\varphi$ með formúlunni

$$u * \varphi(x) = u(\varphi(x-\cdot)) = \langle u, \varphi(x-\cdot)\rangle. \tag{18.3.7}$$

□

Það er ekki erfitt að sýna fram á að $u * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ef $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ er grunnlausn hlutafleiðuvirkjans $P(\partial)$, þá er $u = E * \varphi$ sérlausn jöfnunnar $P(\partial)u = \varphi$. Þegar eiginleikar grunnlausnarinnar $E$ eru þekktir þá er oft hægt að skipta á fallinu $\varphi$ og falli $f$ sem er ekki eins oft deildanlegt og $\varphi$ og jafnvel ekki með þjappaða stoð, þannig að $u = E * f$ sé vel skilgreind lausn á $P(\partial)u = f$.

## 18.4 Grunnlausn bylgjuvirkjans

Í setningu 15.5.1 er að finna lausn einvíðu bylgjujöfnunnar $\partial_t^2 - c^2\partial_x^2 u = f$ með upphafsskilyrðum $u(x,0) = \varphi(x)$ og $\partial_t u(x,0) = \psi(x)$. Hún er gefin með d'Alembert-formúlunni

$$u(x,t) = \partial_t\big(E_t * \varphi\big)(x) + E_t * \psi(x) + E * f(x,t),$$

þar sem fallið $E$ er gefið með

$$E(x,t) = \frac{1}{2c}H(ct-x)H(ct+x) = \begin{cases} 1/2c, & |x| \le ct, \\ 0, & |x| > ct. \end{cases} \tag{18.4.1}$$

Þetta fall reynist vera grunnlausn bylgjuvirkjans. Til þess að staðfesta það, þurfum við að sýna að

$$\langle \big(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2\big)E, \varphi\rangle = \langle E, \big(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2\big)\varphi\rangle = \varphi(0,0), \qquad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Við notum nú sama rithátt og í grein 15.2, skiptum yfir í kennihnit og fáum þá á sama hátt og í sýnidæmi 18.3.2

$$\begin{aligned}
\langle \big(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2\big)E, \varphi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2c}H(ct-x)H(ct+x)\big(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2\big)\varphi(x,t)\,dxdt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2c}H(-\eta)H(\xi)(-4c^2\partial_\xi\partial_\eta\psi(\xi,\eta))\frac{1}{2c}\,d\xi d\eta \\
&= -\int_{-\infty}^{0}\bigg(\int_0^{+\infty} \partial_\xi\partial_\eta\psi(\xi,\eta)\,d\xi\bigg)\,d\eta \\
&= \int_{-\infty}^{0} \partial_\eta\psi(0,\eta)\,d\eta = \psi(0,0) = \varphi(0,0).
\end{aligned}$$

## 18.5 Grunnlausn varmaleiðnivirkjans

Varmaleiðnikjarninn $E$ reynist vera grunnlausn varmaleiðnijöfnunnar. Við skulum sýna fram á það í tilfellinu $n = 1$. Tilfellið $n > 1$ gengur nánast eins fyrir sig. Til þess þurfum við að sýna að

$$\langle \big(\partial_t - \kappa\partial_x^2\big)E, \varphi\rangle = \langle E, \big(-\partial_t - \kappa\partial_x^2\big)\varphi\rangle = \varphi(0,0), \qquad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2). \tag{18.5.1}$$

Við athugum að $E(x,t) = 0$ ef $t < 0$, svo

$$\langle (\partial_t - \kappa\partial_x^2)E, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E(x,t)\big(-\partial_t\varphi(x,t) - \kappa\partial_x^2\varphi(x,t)\big)\,dxdt. \tag{18.5.2}$$

Ef $x$ er haldið föstu og heildað er með tilliti til $t$, þá fæst

$$\int_\varepsilon^{+\infty} E(x,t)\big(-\partial_t\varphi(x,t)\big)\,dt = -\Big[E(x,t)\varphi(x,t)\Big]_\varepsilon^{+\infty} + \int_\varepsilon^{+\infty} \partial_t E(x,t)\varphi(x,t)\,dt. \tag{18.5.3}$$

Nú skulum við halda $t$ föstu og hlutheilda með tilliti til $x$ tvisvar sinnum. Fyrst $\varphi = 0$ fyrir utan takmarkað mengi, þá er

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E(x,t)\partial_x^2\varphi(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x^2 E(x,t)\varphi(x,t)\,dx. \tag{18.5.4}$$

Nú notfærum við okkur (18.5.3) og (18.5.4) í (18.5.2) og fáum þá

$$\begin{aligned}\langle (\partial_t - \kappa\partial_x^2)E, \varphi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\bigg(\int_{-\infty}^{+\infty} E(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\,dx \\ &\quad + \int_\varepsilon^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \big(\partial_t - \kappa\partial_x^2\big)E(x,t)\varphi(x,t)\,dxdt\bigg) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\bigg(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa\varepsilon}} e^{-x^2/4\kappa\varepsilon}\varphi(x,\varepsilon)\,dx\bigg).\end{aligned}$$

Hér höfum við notfært okkur að $E$ er lausn á varmaleiðnijöfnunni ef $t > 0$. Nú skiptum við um breytistærð og fáum að lokum

$$\langle (\partial_t - \kappa\partial_x^2)E, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}\varphi(\sqrt{4\kappa\varepsilon}\,y, \varepsilon)\,dy = \varphi(0,0).$$

## 18.6 Grunnlausn Laplace-virkjans

Nú snúum við okkur að Laplace-virkjanum. Í útreikningum okkar á Green-föllum í grein 17.7, gegndi fallið $E$, sem skilgreint er með

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln|x|, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ n = 2, \\ \dfrac{-1}{4\pi|x|}, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ n = 3, \end{cases} \tag{18.6.1}$$

lykilhlutverki. Það reynist vera grunnlausn Laplace-virkjans. Við byrjum á tilfellinu $n = 2$. Athugum að formúlan yfir Laplace-virkjann í pólhnitum í viðauka D gefur að fyrir föll $v$ af gerðinni $v(x_1, x_2) = g(r)$ er

$$\Delta v = \frac{1}{r^2}\Big(r\partial_r\big(r\partial_r\big) + \partial_\theta^2\Big)g(r) = \frac{1}{r}\big(rg'(r)\big)',$$

svo það er greinilegt að $\Delta E = 0$ á $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Til þess að staðfesta að $E$ sé grunnlausn, þá þurfum við að sanna að

$$\langle \Delta E, \varphi\rangle = \langle E, \Delta\varphi\rangle = \delta(\varphi) = \varphi(0,0), \qquad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2). \tag{18.6.2}$$

Við snúum þessari formúlu yfir í pólhnit og setjum $\psi(r,\theta) = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Þá fáum við að

$$\langle \Delta E, \varphi\rangle = \langle E, \Delta\varphi\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \ln r\left[\frac{1}{r}\partial_r\big(r\partial_r\psi\big) + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2\psi\right] r\,drd\theta.$$

Fallið $\psi$ er $2\pi$-lotubundið í $\theta$ og því er heildið af seinni liðnum 0. Við höfum einnig að $\psi(r,\theta)=0$, ef $r$ er nógu stórt, og því fáum við með hlutheildun

$$\begin{aligned}\langle E,\Delta\varphi\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\big(\ln r\big)\partial_r\big(r\partial_r\psi\big)\,drd\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bigg(\Big[\big(\ln r\big)r\partial_r\psi\Big]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}\partial_r\psi\,dr\bigg)d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(0,\theta)\,d\theta=\varphi(0,0)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta=\varphi(0,0).\end{aligned}$$

Í tilfellinu $n=3$ er $E$ gefið með formúlunni

$$E(x)=\frac{-1}{4\pi r},\qquad r=|x|,\quad x\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}. \tag{18.6.3}$$

Til þess að sýna fram á að þetta sé grunnlausn, þá snúum við yfir í kúluhnit og setjum $\psi(r,\theta,\phi)=\varphi(r\sin\theta\cos\phi,r\sin\theta\sin\phi,r\cos\theta)$. Laplace-virkinn í kúluhnitum er gefinn í viðauka D. Þar með er

$$\begin{aligned}\langle E,\Delta\varphi\rangle = \frac{-1}{4\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}&\\ &\frac{1}{r}\bigg[\frac{1}{r^2}\partial_r\big(r^2\partial_r\psi\big)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\big(\sin\theta\partial_\theta\psi\big)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2\psi\bigg]r^2\sin\theta\,drd\theta d\phi.\end{aligned}$$

Nú er $\psi$ $2\pi$-lotubundið sem fall af $\phi$ og því er heildið af síðasta liðnum 0. Við höfum einnig að

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\big(\sin\theta\partial_\theta\psi\big)r^2\sin\theta\,d\theta=\Big[\sin\theta\partial_\theta\psi\Big]_0^{\pi}=0.$$

Eftir stendur því

$$\begin{aligned}\langle\Delta E,\varphi\rangle &= -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}\partial_r\big(r^2\partial_r\psi\big)\sin\theta\,drd\theta d\phi\\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\bigg(\Big[\frac{1}{r}r^2\partial_r\psi\Big]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\partial_r\psi\,dr\bigg)\sin\theta\,d\theta d\phi\\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(0,\theta,\phi)\,\sin\theta\,d\theta d\phi=\varphi(0).\end{aligned}$$

**Sýnidæmi 18.6.1** (*Hleðsluþéttleiki á línu og grunnlausn Laplace-virkjans*). Í sýnidæmi 18.2.9 sáum við að Coulomb-mættið er rafmætti sem hleðsla $Q=\epsilon_0$ í upphafspunktinum skapar í rúminu $\mathbb{R}^3$. Hugsum okkur nú jafna hleðsludreifingu $\varrho_\ell$ $[C/m]$ á línu $\ell$ í þrívíðu rúmi og veljum hnitakerfið þannig að línan fari gegnum punktinn $(\xi,\eta)$ í planinu $\mathbb{R}^2$ og standi hornrétt á það. Með svipuðum rökum og í sýnidæmi 18.2.9 getum við sýnt fram á að þessi hleðsludreifing sé veikt markgildi af samfelldri hleðsludreifingu í sívalningi $S_r$ með geislann $r$ umhverfis línuna $\ell$, sem skreppur saman í hleðsludreifingu á línunni ef $r\to 0+$. Við fáum þá að hleðsluþéttleikinn er dreififallið $\varrho_\ell\delta_\zeta$ og að rafmættið er lausn á tvívíðu Laplace-jöfnunni

$$\Delta V=-(\varrho_\ell/\epsilon_0)\delta_\zeta.$$

Mættið er þar með gefið með

$$V(z)=\frac{-\varrho_\ell}{\epsilon_0}E(z-\zeta)=\frac{-\varrho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\ln|z-\zeta|,$$

þar sem $z=x+iy,\zeta=\xi+i\eta\in\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$. Grunnlausnin $E(z)=\big(\ln|z|\big)/2\pi$ er því sjálf rafstöðumættið sem línuhleðslan af styrk $-\epsilon_0$ á línunni gegnum $\zeta=0$ skapar í rúminu. $\square$

**Sýnidæmi 18.6.2** (*Green-föll í rafstöðufræði*). Látum $X$ vera takmarkað svæði í þrívíðu rúmi og gerum ráð fyrir að jaðar þess sé úr leiðandi efni. Ef punkthleðsla $Q$ er staðsett í punktinum $\xi$ í $X$ þá skapast rafmætti $u$ í svæðinu $X$ sem uppfyllir $-\epsilon\Delta u = Q\delta_\xi$, því hleðsluþéttleikinn er $Q\delta_\xi$, og $u$ er núll á jaðrinum. Ef við gefum okkur að til sé Green-fall á svæðinu $X$, þá uppfyllir fallið

$$x \mapsto v(x) = G(x,\xi) = E(x-\xi) + w_X(x,\xi)$$

jöfnuna $\Delta v = \delta_\xi$ og $v$ er núll á jaðrinum. Þar með segir ótvíræðnisetningin fyrir Dirichlet-verkefnið að

$$u(x) = -\frac{Q}{\epsilon}G(x,\xi), \qquad x \in X.$$

□