Kafli 1

NOKKUR UNDIRSTÖÐUATRIÐI UM AFLEIÐUJÖFNUR

Samantekt. Afleiðujöfnur eru ein auðugasta og fjölbreytilegasta grein stærðfræðinnar sem snertir ótalmörg svið raunvísinda og tækni. Þær koma fyrir í stærðfræðilegum líkönum af fyrirbærum í umhverfi okkar. Það á jafnt við um náttúruleg fyrirbæri og þau sem gerð eru af manna höndum. Margar afleiðujöfnur eru leiddar út frá eðlisfræðilegum lögmálum, t.d. öðru lögmáli Newtons, lögmálinu um varðveislu orku, lögmálinu um varðveislu skriðþunga eða lögmálinu um varðveislu hleðslu. Þessum kafla er ætlað að vera inngangur að afleiðujöfnum. Við byrjum á því að innleiða ritháttt fyrir afleiðujöfnur og kynnast nokkrum stærðfræðilegum líkönum af eðlisfræðilegum fyrirbærum. Við fjöllum síðan um upphafsgildisverkefni, jaðargildisverkefni og eigingildisverkefni. Við ljúkum svo kaflanum með því að fjalla um tilvist og ótvíræðni lausna á afleiðujöfnuhneppum. Við sönnum tilvistarsetningu fyrir fyrsta stigs hneppi á staðalformi, sem kennd er við Picard.

1.1 Skilgreining á nokkrum hugtökum

Afleiðujafna er jafna sem lýsir sambandi milli fallgilda óþekkts falls og gilda á einstökum afleiðum þess. Ef óþekkta fallið er háð einni breytistærð, þá kallast jafnan *venjuleg afleiðujafna* , en ef það er háð fleiri en einni breytistærð, þá kallast hún *hlutafleiðujafna*. Venjulega afleiðujöfnu er alltaf hægt að umrita yfir í jafngilda jöfnu af gerðinni

$$F(t, u, u', u'', \dots, u^{(m)}) = 0 \tag{1.1.1}$$

þar sem við hugsum okkur að t sé breytistærð, sem tekur gildi í einhverju hlutmengi A af $\mathbb{R}$ og að u sé óþekkt fall sem skilgreint er á A og tekur gildi í $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ eða jafnvel $\mathbb{R}^m$. Úrlausn jöfnunnar felst í því að finna opið bil $I \subset A$ og öll föll u þannig að vigurinn

$$(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(m)}(t)) \tag{1.1.2}$$

sé í skilgreiningarmengi fallsins F og uppfylli jöfnuna

$$F(t, u(t), u'(t), u''(t), \dots, u^{(m)}(t)) = 0, \qquad t \in I. \tag{1.1.3}$$

Við segjum þá að fallið u sé lausn á jöfnunni (1.1.1). *Stig* afleiðujöfnu er hæsta stig á afleiðu, sem kemur fyrir í jöfnunni. Við segjum að m-ta stigs afleiðujafnan (1.1.1) sé á *staðalformi* þegar hún hefur verið umrituð yfir í jafngilda jöfnu af taginu

$$u^{(m)} = G(t, u, u', \dots, u^{(m-1)}). \tag{1.1.4}$$

Afleiðujafna af gerðinni

$$a_m(t)u^{(m)} + a_{m-1}(t)u^{(m-1)} + \cdots + a_1(t)u' + a_0(t)u = f(t), \tag{1.1.5}$$

þar sem föllin $a_0, \dots, a_m, f$ eru skilgreind á bili $I \subset \mathbb{R}$, er sögð vera *línuleg*. Ástæðan fyrir nafngiftinni er, að vinstri hliðin skilgreinir línulega vörpun

$$\begin{gathered} L : C^m(I) \to C(I), \\ Lu(t) = a_m(t)u^{(m)}(t) + a_{m-1}(t)u^{(m-1)}(t) + \cdots + a_1(t)u'(t) + a_0(t)u(t), \end{gathered}$$

ef $a_0, \dots, a_m \in C(I)$. Hér táknar $C^m(I)$ línulegt rúm allra m sinnum samfellt deildanlegra falla á I og $C(I)$ táknar rúm allra samfelldra falla á I. Við segjum að línulega jafnan (1.1.5) sé *óhliðruð* ef f er núllfallið. Annars segjum við að hún sé *hliðruð*. Í viðauka A er rithátturinn sem við notum skilgreindur.

Erfitt er að lýsa hlutafleiðujöfnum með almennum hætti eins og í (1.1.1), en sem dæmi um hlutafleiðujöfnur getum við tekið

$$\begin{aligned} &\partial_x u + i\partial_y u = 0, && (\textit{Cauchy–Riemann–jafna}\ ), \\ &\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0, && (\textit{Laplace–jafna}), \\ &\partial_t u - \kappa(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u) = f(x,y,z,t), && (\textit{varmaleiðnijafna}), \\ &\partial_t^2 u - c^2(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u) = f(x,y,z,t), && (\textit{bylgjujafna}). \end{aligned}$$

Það eru margvíslegar spurningar sem menn leita svara við þegar afleiðujöfnur eru leystar. Eðlilega fjallar fyrsta spurningin um tilvist á lausn. Ef henni er svarað játandi er eðlilegt að spyrja næst með hvaða skilyrðum lausn sé ótvírætt ákvörðuð og síðan hvernig ákvarða megi lausnir og finna nálganir á þeim. Til þess að útskýra þetta skulum við líta á einföldustu afleiðujöfnu sem hugsast getur

$$u' = 0.$$

Við vitum að öll fastaföll, $u(t) = c$, $t \in \mathbb{R}$, uppfylla þessa jöfnu og að sérhver lausn er fastafall. Spurningunni um tilvist er því svarað játandi, en spurningunni um ótvíræðni er svarað neitandi, því við höfum óendanlega margar lausnir. Lítum á aðeins flóknara dæmi, nefnilega jöfnuna

$$u' = f, \tag{1.1.6}$$

þar sem við hugsum okkur að fallið f sé samfellt á bilinu $I \subset \mathbb{R}$. Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar segir okkur að sérhvert stofnfall f sé lausn. Jafnframt vitum við að mismunur tveggja stofnfalla er fastafall og því er sérhver lausn af gerðinni

$$u(t) = b + \int_a^t f(\tau)\, d\tau, \qquad t, a \in I. \tag{1.1.7}$$

Ef við setjum nú það skilyrði að lausnin eigi að taka ákveðið gildi b í punktinum $a \in I$,

$$u' = f(t), \qquad u(a) = b, \tag{1.1.8}$$

þá fæst ótvírætt ákvörðuð lausn og hún er sett fram með formúlunni (1.1.7).

Hreyfijöfnur aflfræðinnar gefa mörg dæmi um afleiðujöfnur. Við skulum rifja upp annað lögmál Newtons áður en við tökum slík dæmi. Hugsum okkur að hlutur með massa m sé á hreyfingu og að staðsetning hans sem fall af tíma t í einhverju hnitakerfi sé gefin með staðarvigrinum $\vec{r}(t)$. Hraðann á tímanum t táknum við með $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$ og hröðun hans með $\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t)$. Annað lögmál Newtons segir að

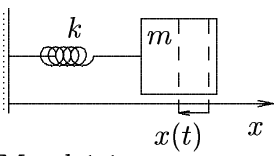
$$m\vec{a} = \vec{F}, \tag{1.1.9}$$

þar sem $\vec{F}$ táknar summu allra krafta sem verka á hlutinn. Kraftarnir geta verið háðir tíma, staðsetningu og hraða, $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$, þannig að (1.1.9) er í raun annars stigs afleiðujöfnuhneppi,

$$m\vec{r}\,''(t) = \vec{F}(t, \vec{r}(t), \vec{r}\,'(t)), \tag{1.1.10}$$

þar sem hnitin þrjú í vigrinum $\vec{r} = (x, y, z)$ eru óþekkt föll af t.

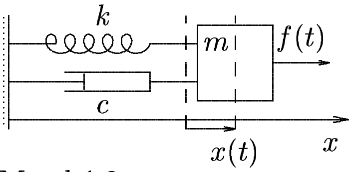
Sýnidæmi 1.1.1 (*Lögmál Hookes; deyfð sveifla*). Lítum á massa sem festur er



Mynd 1.1

við gorm og hreyfist núningslaust eftir línu. Hugsum okkur að hnitakerfið sé valið þannig á línunni að x tákni færslu massans frá jafnvægisstöðu, $x > 0$ ef gormurinn er teygður og $x < 0$ ef honum er þrýst saman. Þegar gormurinn er teygður eða honum er þrýst saman, þá verkar hann með krafti f á massann. Lögmál Hookes segir að krafturinn sé í réttu hlutfalli við færsluna, en að hann hafi öfuga stefnu. Þetta þýðir að $f = -kx$, þar sem $k > 0$ nefnist *fjaðurstuðull* gormsins. Nú lítum við á annað lögmál Newtons. Fyrst massinn færist eftir línu, sem við veljum sem x-ás, þá er $y(t) = z(t) = 0$ fyrir öll t, svo fyrsta hnitið í vigurjöfnunni (1.1.10) verður hreyfijafna massans

(1.1.11)
$$mx'' = -kx.$$



Mynd 1.2

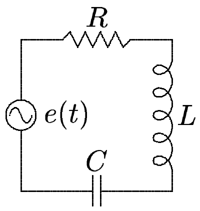
Nú skulum við líta á hlut með massann m sem er tengdur við gorm og höggdeyfi. Það er yfirleitt góð nálgun að gera ráð fyrir því að krafturinn, sem verkar frá höggdeyfinum á hlutinn sé í réttu hlutfalli við hraða hlutarins og að hann sé í öfuga stefnu við hraðann. Þetta þýðir að krafturinn er $-cx'(t)$, þar sem $c > 0$. Við köllum fastann c *deyfingarstuðul* höggdeyfisins. Við skulum einnig hugsa okkur að á massann verki ytri kraftur $f(t)$. Annað lögmál Newtons segir þá að $mx'' = -kx - cx' + f(t)$ og við fáum annars stigs afleiðujöfnu fyrir x

(1.1.12)
$$mx'' + cx' + kx = f(t).$$

□

Þetta dæmi á sér hliðstæðu í rafsegulfræði:

Sýnidæmi 1.1.2 (*RLC–rás*). Lítum á rafrás sem samanstendur af spennugjafa með frumspennuna $e(t)$, viðnámi R, spólu með spanstuðul L og þétti með rýmdina C. Hlutar rásarinnar eru tengdir saman eins og myndin sýnir.



Mynd 1.3

Við látum $i(t)$ tákna strauminn í rásinni og $q(t)$ tákna hleðslu þéttisins sem föll af tíma t. Varðveisla orkunnar er sett fram í *spennulögmáli Kirchhoffs*, en það segir að frumspennan sé jöfn summunni af spennumuni yfir einstaka hluta rásarinnar. Spennumunurinn yfir viðnámið er $Ri(t)$, spennumunurinn yfir spóluna er $Li'(t)$ og spennumunurinn yfir þéttinn er $C^{-1}q(t)$. Við höfum því

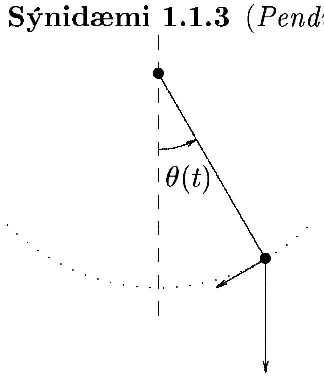
$$Ri(t) + Li'(t) + C^{-1}q(t) = e(t).$$

Við deildum þessa jöfnu, notfærum okkur að $q' = i$ og fáum annars stigs jöfnuna

(1.1.13)
$$Li'' + Ri' + C^{-1}i = e'(t).$$

Við sjáum að þetta er sama jafnan og (1.1.12). □

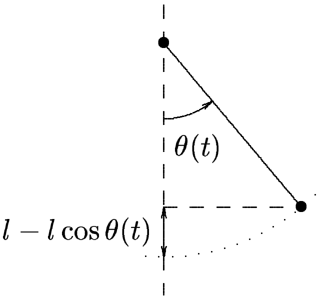
Sýnidæmi 1.1.3 (*Pendúll*). Lítum á kúlu með massa m sem hangir í stöng



Mynd 1.4

af lengd l og gerum ráð fyrir að massi stangarinnar sé hverfandi miðað við massa kúlunnar. Stöngin er fest að ofanverðu þannig að massinn sveiflist án núnings. Við táknum útslagshornið sem fall af tíma t með $\theta(t)$ eins og myndin sýnir. Hornhraðinn er $\theta'(t)$, brautarhraðinn er $l\theta'(t)$ og brautarhröðunin er $l\theta''(t)$. Kraftarnir sem verka á kúluna eru annars vegar togkrafturinn í stönginni og hins vegar þyngdarkrafturinn mg lóðrétt niður. Summa þessara krafta er $-mg\sin\theta(t)$ í stefnu snertilsins við brautina, svo annað lögmál Newtons gefur okkur hreyfijöfnu pendúlsins

$$ml\theta'' = -mg\sin\theta. \tag{1.1.14}$$



Mynd 1.5

Við getum stytt út massann og fáum að lokum jöfnuna

$$\theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

Þetta er annars stigs afleiðujafna, en hún er ekki línuleg, því sínus er ekki línulegt fall. Ef útslagið $\theta(t)$ er lítið, þá er hægt nálga $\sin\theta = \theta - \theta^3/3! + \cdots$ með fyrsta liðnum í Taylor-röðinni og þá fæst línuleg annars stigs jafna

$$\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0. \tag{1.1.15}$$

Hægt er að sýna fram á að lausnir (1.1.15) séu góðar nálganir á lausnum (1.1.14) ef útslagið er lítið. Hreyfijöfnuna (1.1.14) er einnig hægt að leiða út með því að ganga út frá varðveislu orkunnar. Eins og áður segir, þá er hraði kúlunnar við tímann t jafn $l\theta'(t)$ og því er hreyfiorka kúlunnar $\frac{1}{2}m(l\theta')^2$. Stöðuorkan í þyngdarsviðinu er $mg(l - l\cos\theta)$. Ef gengið er út frá því að heildarorkan

$$E = \frac{1}{2}m(l\theta')^2 + mg(l - l\cos\theta)$$

sé fasti, þá fæst (1.1.14) með því að deilda þessa jöfnu. □

Æfingardæmi

1. Hefur jafnan $tu' = u$ með skilyrðinu $u(0) = 0$ ótvírætt ákvarðaða lausn á $\mathbb{R}$?

2. Sýnið að fyrir sérhvert $\alpha > 0$ sé fallið u_α sem skilgreint er með

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} t^3, & t < 0, \\ 0, & 0 \le t \le \alpha, \\ (t-\alpha)^3, & t > \alpha, \end{cases}$$

í $C^1(\mathbb{R})$ og jafnframt að það sé lausn á verkefninu $u' = 3u^{2/3}$, $u(-1) = -1$.
[Þetta er dæmi um upphafsgildisverkefni, sem hefur óendanlega margar lausnir.]

3. Finnið afleiðujöfnur sem föllin u uppfylla út frá eiginleikunum sem gefnir eru og leysið þær síðan:

a) Snertilínan við grafið af u í punktinum $(x, u(x))$ sker x-ásinn í $(x/2, 0)$.
b) Sérhver bein lína sem sker graf u undir réttu horni inniheldur punktinn $(0, 1)$.
c) Graf fallsins u er hornrétt á sérhvern feril af gerðinni $y = k + x^2$, $k \in \mathbb{R}$.
d) Snertilínan í punktinum $(x, u(x))$ inniheldur punktinn $(-u(x), x)$.

1.2 Fyrsta stigs jöfnur

Fyrsta stigs línuleg afleiðujafna er af gerðinni

$$a_1(t)u' + a_0(t)u = f(t). \tag{1.2.1}$$

Við skulum rifja upp aðferðina til að leysa þessa jöfnu í því tilfelli að stuðlarnir eru samfelld föll á einhverju bili I og að $a_1(t) \neq 0$ fyrir öll $t \in I$. Með því að deila í gegnum jöfnuna með $a_1(t)$, þá getum við gert ráð fyrir því að a_1 sé fastafallið 1 og við ætlum því að leysa

$$u' + a_0(t)u = f(t).$$

Aðferðin gengur út á að skilgreina A sem eitthvert stofnfall a_0,

$$A(t) = c + \int_a^t a_0(\tau)\, d\tau, \qquad t, a \in I,$$

og athuga að ef u er lausn, þá gildir

$$\frac{d}{dt}(e^{A(t)}u(t)) = e^{A(t)}(u'(t) + a_0(t)u(t)) = e^{A(t)}f(t).$$

Af þessari jöfnu leiðir síðan að

$$e^{A(t)}u = C + \int_a^t e^{A(\tau)}f(\tau)\, d\tau,$$

og þar með fæst almenna lausnarformúlan

$$u(t) = e^{-A(t)}(C + \int_a^t e^{A(\tau)}f(\tau)\, d\tau),$$

þar sem C er einhver fasti. Þessi útreikningur okkar sýnir að sérhver lausn á jöfnunni hlýtur að vera af þessari gerð. Nú er hins vegar lauflétt að sýna að þetta er lausn, með því að stinga þessari formúlu inn í afleiðujöfnuna. Verkefnið

$$u' + a_0(t)u = f(t), \qquad u(a) = b,$$

hefur ótvírætt ákvarðaða lausn og hún er fundin með því að velja stofnfallið A þannig að $A(a) = 0$ og $C = b$,

$$u(t) = e^{-A(t)}(b + \int_a^t e^{A(\tau)}f(\tau)\, d\tau), \qquad A(t) = \int_a^t a_0(\tau)\, d\tau. \tag{1.2.2}$$

Fyrsta stigs jöfnur koma fyrir í einföldum líkönum í eðlisfræði og líffræði:

Sýnidæmi 1.2.1 (*Geislavirkni efna*). Hugsum okkur að á tilteknum tíma innihaldi ákveðið efni $N(t)$ frumeindir af ákveðinni geislavirkri samsætu. Nú er N heiltölugilt fall, en við hugsum okkur að við getum nálgað N með samfellt deildanlegu falli $u(t)$. *Hrörnun* geislavirku samsætunnar yfir tímabilið $[t, t+h]$ er mismunurinn $N(t+h) - N(t)$. Hann reynist vera í hlutfalli við $N(t)$ og h, $N(t+h) - N(t) \approx -kN(t)h$ ef h er nógu lítið. Ef við gefum okkur að sama gildi um fallið u, þá fáum við jöfnuna

$$u'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} = -ku(t)$$

fyrir nálgunarfallið. Ef við setjum einfaldlega N í hlutverk u þá fáum við

$$N(t) = N(0)e^{-kt}, \qquad t \geq 0.$$

Venjulega reikna menn fastann k út frá *helmingunartíma* T fyrir samsætuna, en það er sá tími sem það tekur $N(t)$ að minnka frá $N(0)$ niður í $\frac{1}{2}N(0)$. Fastinn k ákvarðast þá út úr jöfnunni $N(T) = e^{-kT}N(0) = \frac{1}{2}N(0)$, $k = (\ln 2)/T$. Þar með fáum við

$$N(t) = N(0)2^{-t/T}, \qquad t \geq 0.$$

$\square$

Sýnidæmi 1.2.2 (*Stofnstærð*). Allra einföldustu líkön fyrir stærð dýrastofna og mannfjölda eru kennd við stærðfræðinginn Malthus og eru frá árinu 1798. Við gerum ráð fyrir að $P(t)$ tákni fjölda einstaklinga í stofninum og við hugsum okkur að $P(t)$ sé samfellt deildanlegt fall af tíma, enda þótt það geti ekki verið annað en heiltölugilt. Við látum $B(t)$ tákna fjölda fæðinga í stofninum frá tímanum $t = t_0$ og $D(t)$ fjölda dauðsfalla frá $t = t_0$. Við skilgreinum út frá þessum stærðum *fæðingartíðni* með

$$\beta(t) = \lim_{h\to 0} \frac{B(t+h) - B(t)}{hP(t)} = \frac{B'(t)}{P(t)}$$

og síðan *dánartíðni* með

$$\delta(t) = \lim_{h\to 0} \frac{D(t+h) - D(t)}{hP(t)} = \frac{D'(t)}{P(t)}.$$

Ef við gerum ráð fyrir að stofninn stækki einungis við eigin fjölgun, þá fáum við

$$P'(t) = B'(t) - D'(t) = (\beta(t) - \delta(t))P(t),$$

en þessi jafna hefur lausnina

$$P(t) = P(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} (\beta(\tau) - \delta(\tau))\, d\tau \right), \qquad t \geq t_0.$$

Ef bæði β og δ eru fastaföll, þá fáum við

$$P(t) = P(t_0)e^{k(t-t_0)}, \qquad k = \beta - \delta, \qquad t \geq t_0.$$

Þar sem þessi lausn er ótakmörkuð, ef fæðingartíðnin er hærri en dánartíðnin, þá getur hún ekki átt við nema í takmarkaðan tíma. Til þess að fá lausn sem líkir betur eftir því sem gerist í raunveruleikanum er nauðsynlegt að setja einhverjar skorður á stofnstærðina inn í forsendur líkansins. Við víkjum að þessu í næsta sýnidæmi. $\square$

Við segjum að fyrsta stigs afleiðujafna $u' = f(t,u)$ sé *aðskiljanleg* ef hægt er að rita fallið f sem kvóta af gerðinni $f(t,x) = g(t)/h(x)$. Til þess að leysa jöfnuna, þá skrifum við hana sem $h(u)u' = g(t)$ og heildum síðan

$$\int h(u(t))u'(t)\, dt = c + \int g(t)\, dt,$$

þar sem c er heildunarfasti. Ef við viljum síðan leysa verkefnið

$$u' = f(t,u), \qquad u(a) = b,$$

þá veljum við stofnfall H fyrir h og heildum

$$H(u(t)) - H(b) = \int_b^{u(t)} h(x)\, dx = \int_a^t h(u(\tau))u'(\tau)\, d\tau = \int_a^t g(\tau)\, d\tau. \tag{1.2.3}$$

Ef til er grennd um punktinn b þar sem fallið H hefur andhverfu, þá getum við skrifað lausnina sem

$$u(t) = H^{[-1]}\left(H(b) + G(t)\right), \qquad G(t) = \int_a^t g(\tau)\, d\tau. \tag{1.2.4}$$

Í útreikningum á venjulegum dæmum borgar sig yfirleitt ekki að reikna út formúlu fyrir $H^{[-1]}$ og stinga síðan gildinu $H(b) + G(t)$ inn í þá formúlu eins og lýst er með (1.2.4). Þess í stað er betra að leysa $u(t)$ úr jöfnunni (1.2.3).

Sýnidæmi 1.2.3 (*Stofn af takmarkaðri stærð*). Nú skulum við halda áfram með sýnidæmi 1.2.2 og gera ráð fyrir því að fæðingartíðnin sé háð stofnstærðinni þannig að $\beta(t) = \beta_0 - \beta_1 P(t)$, þar sem β_0 og β_1 eru jákvæðir fastar en að dánartíðnin $\delta(t) = \delta_0$ sé föst. Afleiðujafnan fyrir stofnstærðina verður þá

$$P'(t) = (\beta(t) - \delta(t))P(t) = (\beta_0 - \beta_1 P(t) - \delta_0)P(t) = k(M - P(t))P(t),$$

þar sem $k = \beta_1$ og $M = (\beta_0 - \delta_0)/\beta_1$. Þetta er aðskiljanleg jafna og við getum skrifað hana sem

$$\frac{P'}{P(M-P)} = \frac{1}{M}\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{M-P}\right)P' = k.$$

Ef við veljum upphafstímann $t_0 = 0$, og setjum $P(0) = P_0$, þá fáum við með heildun

$$\ln P(t) - \ln(M - P(t)) = Mkt + c, \qquad \frac{P(t)}{M - P(t)} = \frac{P_0}{M - P_0}e^{Mkt}.$$

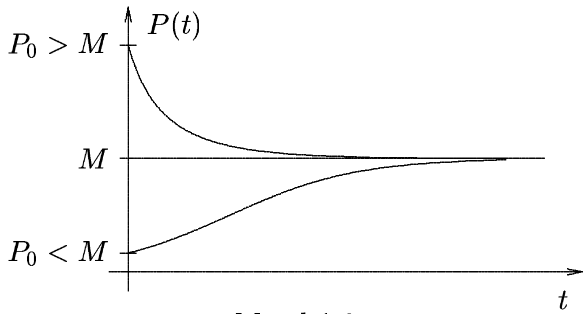
Einfalt er að leysa $P(t)$ út úr þessari jöfnu,

$$P(t) = \frac{MP_0e^{Mkt}}{(M - P_0) + P_0e^{Mkt}} = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-Mkt}}.$$

Á þessari formúlu sjáum við að stærð stofnsins er takmörkuð, hún er alltaf á milli P_0 og M, og við höfum

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = M.$$

□



Mynd 1.6

Í þessu sýnidæmi var auðvelt að leysa út $P(t)$ sem fall af t. Ef ekki er gerlegt að setja lausnina fram með beinni formúlu, þá segjum við að hún sé gefin sem *fólgið fall* af t. Í dæminu um pendúlinn er hægt að skrifa útslagshornið sem fólgið fall af tíma:

Sýnidæmi 1.2.4 (*Pendúll, framhald*). Í sýnidæmi 1.1.3 leiddum við út hreyfijöfnuna $\theta'' + (g/l)\sin\theta = 0$ fyrir útslagshornið $\theta(t)$. Með því að beita einföldu bragði, má umrita þessa jöfnu yfir í aðskiljanlega fyrsta stigs jöfnu. Þetta bragð er fólgið í því að margfalda jöfnuna með θ' og athuga að $\theta'\theta''$ er afleiðan af $\frac{1}{2}(\theta')^2$. Þetta gefur

$$\frac{d}{dt}(\theta')^2 = 2\theta'\theta'' = -(2g/l)(\sin\theta)\theta'.$$

Við veljum hnitin þannig að $\theta(0) = 0$, $\theta'(0) > 0$ og táknum tímann þegar hámarksútslagi θ_0 er fyrst náð með t_0. Við höfum þá $\theta(t_0) = \theta_0$ og $\theta'(t_0) = 0$. Þar með er

$$\big(\theta'(t)\big)^2 = (2g/l)(\cos\theta(t) - \cos\theta_0), \qquad t \in [0, t_0].$$

Við getum nú skilið að breytistærðirnar θ og t

$$1 = (2g/l)^{-1/2}\big(\cos\theta - \cos\theta_0\big)^{-1/2}\theta',$$

sem gefur okkur $\theta(t)$ sem fólgið fall,

$$t = (2g/l)^{-1/2}\int_0^{\theta(t)} \big(\cos\varphi - \cos\theta_0\big)^{-1/2}\,d\varphi, \qquad t \in [0, t_0].$$

Við látum $T = 4t_0$ tákna *lotu* sveiflunnar. Við höfum því

$$T = 4(2g/l)^{-1/2} \int_0^{\theta_0} \big(\cos\varphi - \cos\theta_0\big)^{-1/2}\,d\varphi, \qquad t \in [0, t_0],$$

og sjáum að lotan og þar með sveiflutíðnin er einungis háð hámarksútslagi, lengd pendúlsins og þyngdaghröðuninni, en ekki massanum. □

Æfingardæmi

1. Finnið almennar lausnir á afleiðujöfnunum:
a) $xu' + u = 3xu$, b) $xu' - 3u = x^3$,
c) $(1+x)u' + u = \cos x$, d) $u' = 2xu + 3x^2\exp(x^2)$.

2. Finnið almenna lausn, hugsanlega sem fólgið fall, á afleiðujöfnunum.
a) $u' = \dfrac{(x-1)u^5}{x^2(2u^3-u)}$, b) $u' = 1 + x + u + xu$,
c) $u' + 1 = 2u$.

3. Leysið jöfnuna $u' = t\tan u$ með upphafsskilyrðinu $u(0) = \pi/6$. Hvert er skilgreiningarmengi lausnarinnar?

4. a) Sýnið að jafna af gerðinni $u' = f(u/t)$ ummyndist yfir í jafngilda aðskiljanlega jöfnu fyrir v, ef v er skilgreint með $v(t) = u(t)/t$.

b) Sýnið að sérhver lína gegnum $(0,0)$ skeri alla lausnarferla afleiðujöfnu af gerðinni $u' = f(u/t)$ undir sama horni.

5. Notið aðferðina í dæmi 4 til þess að leysa:
a) $2tuu' - u^2 = t^2$, $t > 0$. b) $tu' = t + u$,
c)c $2t^2u' = u^2 + t^2$, d) $t^2u' = u^2 + tu$.

6. Afleiðujafnan $u' + P(t)u = Q(t)u^n$ kallast Bernoulli-jafna. Ef $n = 0$ eða $n = 1$, þá er hún línuleg. Sýnið að innsetningin $v(t) = u(t)^{1-n}$ ummyndi hana yfir í línulega jöfnu $v' + (1-n)P(t)v = (1-n)Q(t)$, $n \neq 1$.

7. Finnið almenna lausn á jöfnunum
a) $2tu' + u^3e^{-2t} = 2tu$, b) $3u^2u' + u^3 = e^{-t}$,
c) $3u' + u = (1-2x)u^4$, d) $u' + xu = xu^{-1}$.

8. Sýnið að innsetningin $v = \ln u$ ummyndi afleiðujöfnuna $u' + P(t)u = Q(t)u\ln u$ í jöfnuna $v' + P(t) = Q(t)v$. Notið þessa aðferð til þess að finna lausn á jöfnunni $tu' - 4t^2u + 2u\ln u = 0$.

9. Jafna af gerðinni $u' = A(x)u^2 + B(x)u + C(x)$ nefnist *Riccati-jafna*. Gerum ráð fyrir að u_1 sé þekkt lausn á þessari jöfnu. Sýnið að fallið $u = u_1 + 1/v$ sé lausn á Riccati-jöfnunni þá og því aðeins að v uppfylli línulegu fyrsta stigs jöfnuna

$$v' + \big(B(x) + 2A(x)u_1(x)\big)v = -A(x).$$

10. Notið niðurstöðuna úr síðasta dæmi til þess að leysa:
a) $u' + u^2 = 1 + x^2$, b) $u' + 2xu = 1 + x^2 + u^2$,
c) $u' = x^3 + 2u/x - u^2/x$, $(u_1 = -x^2)$,
d) $u' = x^3(u-x)^2 + u/x$, $(u_1(x) = x,\ x > 0)$.

11. Afleiðujafna af gerðinni $u = xu' + f(u')$ nefnist *Clairaut-jafna*. Sýnið að sérhvert fall af gerðinni $u(x) = Cx + f(C)$, þar sem C er fasti, er lausn.

12. Lítum á Clairaut-jöfnuna $u = xu' - \frac{1}{4}\big(u'\big)^2$. Sýnið að lausnarferlarnir í (x,y)-séu allir snertilínur við fleygbogann $y = x^2$ og að $u(x) = x^2$ sé einnig lausn.

1.3 Afleiðujöfnuhneppi

Afleiðujöfnuhneppi er safn af jöfnum sem lýsa sambandi milli gilda óþekktra falla og gilda á einstökum afleiðum þess. Ef óþekktu föllin eru háð einni breytistærð, þá kallast það *venjulegt afleiðujöfnuhneppi*, en það kallast *hlutafleiðujöfnuhneppi* ef þau eru háð fleiri en einni breytistærð. Venjulegt afleiðujöfnuhneppi er alltaf hægt að umrita yfir í jöfnur af gerðinni

$$F_j(t, u_1, \dots, u_k, {u_1}', \dots, {u_k}', \dots, u_1^{(m)}, \dots, u_k^{(m)}) = 0, \qquad j = 1, \dots, l, \tag{1.3.1}$$

þar sem t táknar breytistærðina, $u_1, \dots, u_k$ eru óþekktu föllin og föllin $F_1, \dots, F_l$ taka gildi í $\mathbb{R}$ eða $\mathbb{C}$. Til þess að einfalda ritháttinn, þá skilgreinum við vigurgildu föllin $u = (u_1, \dots, u_k)$ og $F = (F_1, \dots, F_l)$. Þá eru jöfnurnar (1.3.1) jafngildar vigurjöfnunni $F(t, u, u', \dots, u^{(m)}) = 0$, sem hefur sama útlit og (1.1.1). Úrlausn jöfnunnar felst í því að finna opið bil I og öll vigurföll $u = (u_1, \dots, u_k)$, þannig að vigurinn (1.1.2) sé í skilgreiningarmengi fallsins F og uppfylli jöfnuna (1.1.3). *Stig* afleiðujöfnuhneppis er skilgreint sem hæsta stig á afleiðu sem kemur fyrir í jöfnunni. Við segjum að hneppið sé á *staðalformi* , ef fjöldi jafna og fjöldi óþekktra falla er sá sami og það er af gerðinni

$$u^{(m)} = G(t, u, u', \dots, u^{(m-1)}).$$

Mikilvægustu hneppin sem við fáumst við eru fyrsta stigs venjuleg afleiðujöfnuhneppi á staðalformi

$$u' = G(t, u).$$

Ef við skrifum upp hnitaföllin fyrir þetta hneppi, þá fáum við jöfnurnar

$$\begin{aligned} {u_1}' &= G_1(t, u_1, \dots, u_m), \\ {u_2}' &= G_2(t, u_1, \dots, u_m), \\ &\vdots \\ {u_m}' &= G_m(t, u_1, \dots, u_m), \end{aligned}$$

þar sem $G_j : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ eða $G_j : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m$ eftir því hvort við viljum að lausnin taki rauntölugildi eða tvinntölugildi. Föllin $u = (u_1, \dots, u_m)$ og $G = (G_1, \dots, G_m)$ taka gildi í vigurrúminu $\mathbb{R}^m$ eða $\mathbb{C}^m$, eftir því hvort við hugsum okkur að lausnirnar eigi að taka rauntölugildi eða tvinntölugildi. Við segjum að fyrsta stigs jöfnuhneppi sé *línulegt* ef fallið G er af gerðinni

$$G(t, x) = A(t)x + f(t),$$

þar sem $A(t)$ er $m \times m$ fylki og $f(t)$ er m–vigur. Ef við skrifum upp hnitin þá verður hneppið

$$\begin{aligned} {u_1}' &= a_{11}(t)u_1 + \cdots + a_{1m}(t)u_m + f_1(t), \\ {u_2}' &= a_{21}(t)u_1 + \cdots + a_{2m}(t)u_m + f_2(t), \\ &\ \ \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ {u_m}' &= a_{m1}(t)u_1 + \cdots + a_{mm}(t)u_m + f_m(t). \end{aligned}$$

Hér eru föllin $a_{jk}(t)$ stökin í fylkinu $A(t)$. Við segjum að hneppið sé *óhliðrað* ef f er núllfallið og við segjum að það sé *hliðrað* annars.

Lítum nú á venjulega m–ta stigs afleiðujöfnu á staðalformi

$$v^{(m)} = G(t, v, v', \dots, v^{(m-1)}). \tag{1.3.2}$$

Ef við skilgreinum vigurfallið $u = (u_1, \dots, u_m)$ með $u_1 = v, u_2 = v', \dots, u_m = v^{(m-1)}$, þá uppfyllir u jöfnuhneppið

$${u_1}' = u_2, \quad {u_2}' = u_3, \quad \dots \quad {u_{m-1}}' = u_m, \quad {u_m}' = G(t, u_1, \dots, u_m). \tag{1.3.3}$$

Jafnan (1.3.2) og jöfnuhneppið (1.3.3) eru jafngild í þeim skilningi að sérhver lausn v á (1.3.2) gefur lausn $u = (v, v', \dots, v^{(m-1)})$ á (1.3.3) og sérhver lausn u á (1.3.3) gefur lausnina $v = u_1$ á (1.3.2). Þessi einfalda staðreynd er mikilvæg, því einfalt reynist að sanna tilvist á lausnum á fyrsta stigs jöfnuhneppum á staðalformi. Þá niðurstöðu er síðan hægt að nota til að sanna tilvist á lausnum á jöfnum af stigi stærra en 1.

Línulega afleiðujafnan

$$a_m(t)v^{(m)} + \cdots + a_1(t)v' + a_0(t)v = g(t)$$

er greinilega jafngild línulega hneppinu

$$\begin{aligned} &u_1{}' = u_2, \qquad u_2{}' = u_3, \qquad \dots, \quad u_{m-1}{}' = u_m r \\ &u_m{}' = -(a_0(t)/a_m(t))u_1 - \cdots - (a_{m-1}(t)/a_m(t))u_m + g(t)/a_m(t), \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

ef $a_m(t) \neq 0$ fyrir öll $t \in I$. Fylkið A og vigurinn f verða þá

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0/a_m & -a_1/a_m & \dots & -a_{m-1}/a_m \end{bmatrix}, \qquad f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g/a_m \end{bmatrix}. \tag{1.3.5}$$

Sýnidæmi 1.3.1 Jafnan $t^2v'' - tv' + 2v = t^3$ hefur staðalformið

$$v'' = \frac{1}{t}v' - \frac{2}{t^2}v + t.$$

Ef við setjum $u_1 = v$ og $u_2 = v'$, þá fáum við jöfnuhneppið

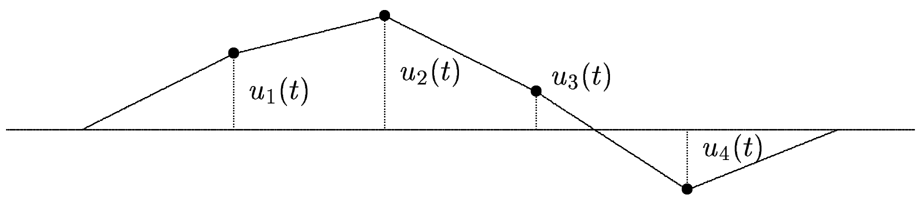
$$\begin{aligned} u_1{}' &= \qquad\qquad u_2, \\ u_2{}' &= -\frac{2}{t^2}u_1 + \frac{1}{t}u_2 + t. \end{aligned}$$

Á fylkjaformi er þetta hneppi $u' = A(t)u + f(t)$, þar sem

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2/t^2 & 1/t \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}.$$

□

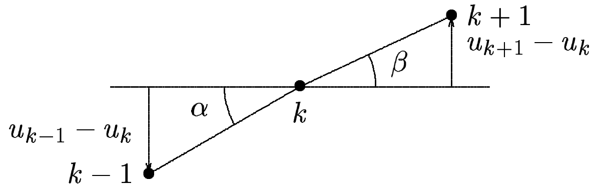
Sýnidæmi 1.3.2 (*Festi*). Lítum á festi af lengd L og massa m. Hún samanstendur af n eins kúlum sem festar eru með jöfnu millibili á streng. Við hugsum okkur að massi strengsins sé hverfandi miðað við massa kúlnanna, að hann sé strekktur og festur niður í báðum endapunktum. Við gerum ráð fyrir að kúlurnar hreyfist í plani og táknum frávik kúlu númer k frá jafnvægisstöðu með $u_k(t)$ eins og myndin sýnir.



Mynd 1.7

Ef T táknar spennuna í strengnum, þá er lóðrétti þáttur togkraftsins sem verkar á massa númer k jafn

$$-T \sin\alpha + T \sin\beta.$$



Mynd 1.8

Ef útslagið er nógu lítið, þá má nálga sínus af hornunum α og β með tangens og við fáum

$$-\sin\alpha \approx \frac{u_{k-1}-u_k}{L/(n+1)}, \quad -\sin\beta \approx \frac{u_{k+1}-u_k}{L/(n+1)}.$$

Massi kúlnanna er m/n, svo annað lögmál Newtons gefur

$$(m/n){u_k}'' = \frac{(n+1)T}{L}\big(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}\big).$$

Látum nú $\varrho = m/L$ tákna massa á lengdareiningu í festinni og $h = L/(n+1)$ tákna fjarlægðina milli miðpunkta kúlnanna. Þá eru þessar jöfnur jafngildar

$$u''_k = \frac{nT}{(n+1)\varrho}\cdot\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{h^2}, \qquad k = 1,2,\dots,n.$$

Þar sem strengurinn er festur niður í endapunktunum, þá setjum við $u_0 = u_{n+1} = 0$ í þessum jöfnum. Þetta er annars stigs jöfnuhneppi og það getum við ritað á fylkjaformi sem

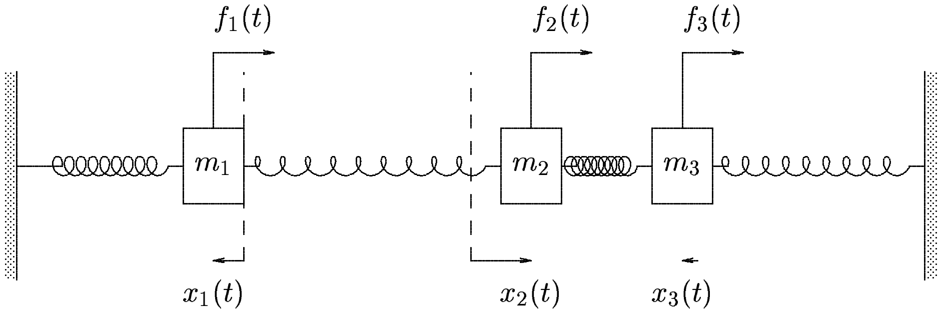
$$(1.3.6) \qquad u'' = Au, \qquad A = -\omega^2\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2\end{bmatrix}$$

þar sem

$$(1.3.7) \qquad \omega = \sqrt{\frac{nT}{(n+1)\varrho h^2}} = \sqrt{n(n+1)}\,c/L, \qquad c = \sqrt{\frac{T}{\varrho}}.$$

□

Sýnidæmi 1.3.3 (*Tengdir gormar*). Lítum á n hluti sem tengdir eru saman með $n+1$ gormi með fjaðurstuðla $k_1,\dots,k_{n+1}$. Við gerum ráð fyrir að þeir sveiflist núningslaust eftir sléttum fleti og að á þá verki ytri kraftar $f_1,\dots,f_n$. Við táknum færslu hlutanna frá jafnvægisstöðu með $x_1(t),\dots,x_n(t)$.



Mynd 1.9

Lögmál Hookes og annað lögmál Newtons gefa okkur hreyfijöfnurnar fyrir þetta kerfi

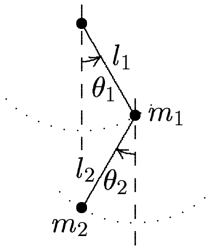
$$\begin{aligned} m_1{x_1}'' &= -k_1x_1 + k_2(x_2-x_1) + f_1,\\ m_j{x_j}'' &= -k_j(x_j-x_{j-1}) + k_{j+1}(x_{j+1}-x_j) + f_j, \quad j = 2,\dots,n-1,\\ m_n{x_n}'' &= -k_n(x_n-x_{n-1}) - k_{n+1}x_n + f_n. \end{aligned}$$

Þetta er annars stigs línulegt jöfnuhneppi og við getum ritað það á fylkjaformi sem

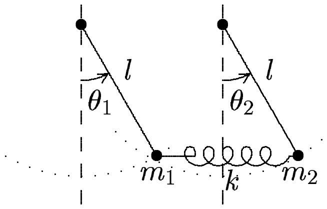
$$x'' = Ax + f(t),$$

$$A = -\begin{bmatrix} (k_1+k_2)/m_1 & -k_2/m_1 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2/m_2 & (k_2+k_3)/m_2 & -k_3/m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (k_n+k_{n+1})/m_n \end{bmatrix}.$$

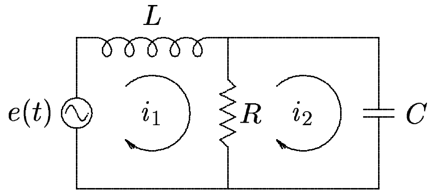
Ef við gerum ráð fyrir að allir massarnir séu eins $m_j = m$ og að allir gormarnir hafi sama fjaðurstuðul $k_j = k$, þá fáum við sama hneppið og í sýnidæmi 1.3.2 með $\omega = \sqrt{k/m}$. □



1. Leiðið út jöfnuhneppi fyrir hreyfingu pendúla af massa m_1 og m_2 og lengd l_1 og l_2, sem tengdir eru saman eins og myndin sýnir. Finnið línulegt jöfnuhneppi sem nálgar hreyfijöfnurnar, þegar útslagið er lítið.

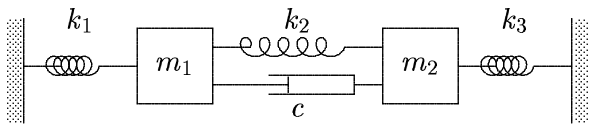


2. Leiðið út jöfnuhneppi fyrir hreyfingu pendúla af massa m_1 og m_2 og lengd l_1 og l_2, sem tengdir eru saman með gormi eins og myndin sýnir. Við gerum ráð fyrir því að gormurinn sé slakur þegar pendúlarnir hanga lóðréttir. Finnið línulegt jöfnuhneppi sem nálgar hreyfijöfnurnar, þegar útslagið er lítið.



3. Leiðið út jöfnuhneppi fyrir rafstraumana i_1 og i_2 í rafrásinni sem sýnd er á myndinni. Veljið straumstefnurnar eins og myndin sýnir.

4. Leiðið út hreyfijöfnur fyrir hreyfingu massanna tveggja sem sýndir eru á myndinni. Massarnir m_1 og m_2 hreyfast núningslaust eftir sléttum fleti. Þeir eru tengdir saman með gormi með fjaðurstuðul k_2 og höggdeyfi með deyfingarstuðul c. Þeir eru einnig tengdir við veggi með gormum með fjaðurstuðlana k_1 og k_3



1.4 Upphafsgildisverkefni

Oft hafa menn áhuga á að finna lausnir á afleiðujöfnum og afleiðujöfnuhneppum sem uppfylla einhverja ákveðna eiginleika. *Upphafsgildisverkefni* snúast um að leysa afleiðujöfnuhneppi með því hliðarskilyrði að lausnin og einhverjar afleiður hennar taki fyrirfram gefin gildi í ákveðnum punkti. Upphafsgildisverkefni fyrir fyrsta stigs hneppi af staðalformi er til dæmis verkefnið

$$u' = f(t,u), \quad t \in I, \qquad u(a) = b. \tag{1.4.1}$$

Hér er átt við að finna eigi lausn $u = (u_1, \dots, u_m)$ á jöfnunni á bilinu I, sem tekur gildið $b = (b_1, \dots, b_m)$ í punktinum $a \in I$. Upphafsgildisverkefni fyrir m-ta stigs línulega jöfnu er af gerðinni

$$\begin{cases} a_m(t)v^{(m)} + \cdots + a_1(t)v' + a_0(t)v = g(t), & t \in I, \\ v(a) = b_0, \quad v'(a) = b_1, \quad \dots \quad v^{(m-1)}(a) = b_{m-1}. \end{cases} \tag{1.4.2}$$

Ef $a_m(t) \neq 0$ fyrir öll $t \in I$, þá getum við deilt í gegnum jöfnuna með $a_m(t)$ og umskrifað hana síðan yfir í jafngilt $m \times m$ línulegt jöfnuhneppi með óþekkta vigurfallið $u = (v, v', \dots, v^{(m-1)})$, eins og lýst er í grein 1.3. Það að leysa upphafsgildisverkefnið (1.4.2) er þá jafngilt því að leysa verkefni af taginu (1.4.1) með $b = (b_0, \dots, b_{m-1})$.

Upphafsgildisverkefni koma eðlilega upp í eðlisfræði. Hugsum okkur til dæmis hlut með massann m á hreyfingu undir áhrifum kraftsviðsins $\vec{F}$. Við gerum ráð fyrir að staðsetningu hlutarins sé lýst með staðarvigrinum $\vec{r}(t)$, að kraftsviðið sé háð tíma t, staðsetningu $\vec{r}$ og hraða $\vec{v}$. Ef við hugsum okkur að staðsetningin og hraðinn séu þekkt á einhverju augnabliki $t = t_0$, $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ og $\vec{v}(t_0) = \vec{r}\,'(t_0) = \vec{v}_0$, þá gefur lausn upphafsgildisverkefnisins

$$m\vec{r}\,'' = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{r}\,'), \qquad \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \quad \vec{r}\,'(t_0) = \vec{v}_0,$$

staðsetningu hlutarins sem fall af tíma.

Sýnidæmi 1.4.1 (*Þyngdarlögmál Newtons*). Við skulum nú huga að einu dæmi um kraftsvið eins og við vorum að fjalla um í textanum hér að framan. Þyngdarlögmál Newtons segir að tveir hlutir dragi hvor annan að sér með krafti, sem er í hlutfalli við margfeldi massa þeirra og í öfugu hlutfalli við fjarlægðina á milli þeirra í öðru veldi. Þegar þessu lögmáli er beitt til þess að reikna út hreyfingu himintungla, þá hugsa menn sér N massa $m_1, \dots, m_N$ sem hafa staðarvigrana $\vec{r}_j = (x_{1j}, x_{2j}, x_{3j})$. Annað lögmál Newtons og þyngdarlögmálið gefa okkur þá jöfnuhneppi með $3N$ óþekktum stærðum

$$m_j \vec{r}_j\,'' = G \sum_{j \neq k} m_k m_j \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^3}, \qquad j = 1, \dots, N, \tag{1.4.3}$$

þar sem G táknar *þyngdarstuðulinn*. Tilsvarandi upphafsgildisverkefni snýst nú um að leysa þessar jöfnur með því að gefa sér staðsetningu og hraða allra massanna á einhverju augnabliki.

Hneppið (1.4.3) hefur haft geysilega mikla þýðingu fyrir rannsóknir manna á afleiðujöfnum allt frá dögum Newtons. Ekki er hægt að leiða út lausnarformúlu fyrir lausnir þess. Til þess að finna jöfnur fyrir brautir reikistjarnanna, er til einföldunar gert ráð fyrir því að sólin sé föst í upphafspunkti hnitakerfisins og að þyngdarkrafturinn milli einstakra reikistjarna sé hverfandi miðað við þyngdarkraftinn milli sólarinnar og reikistjarnanna. Jöfnuhneppið (1.4.3) leysist þá upp í $N-1$ óháð jöfnuhneppi þar sem hvert um sig er af gerðinni

$$m\vec{r}\,'' = -GMm \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}. \tag{1.4.4}$$

Þar sem M táknar massa sólarinnar og m táknar massa reikistjörnunnar. Með þessum hætti tókst Newton að leiða út lögmál Keplers um hreyfingu reikistjarnanna út frá þyngdarlögmálinu. □

1.5 Jaðargildisverkefni

Jaðargildisverkefni snúast um að leysa jöfnu $u^{(m)} = f(t, u, u', \dots, u^{(m-1)})$ af stigi m á takmörkuðu bili $I = [a, b]$ með skilyrðum á $u(a)$, $u'(a), \dots, u^{(m-1)}(a)$ og $u(b)$, $u'(b), \dots, u^{(m-1)}(b)$. Þessi skilyrði eru venjulega sett fram þannig að ákveðnar línulegar samantektir af þessum fallgildum eigi að taka fyrirfram gefin gildi. Fyrir annars stigs jöfnu geta *jaðarskilyrðin* til dæmis verið

$$u(a) = 0, \qquad u'(b) = 0.$$

Lotubundin jaðarskilyrði eru af gerðinni

$$u(a) = u(b), \qquad u'(a) = u'(b).$$

Almenn línuleg jaðarskilyrði fyrir annars stigs jöfnu eru

$$\begin{aligned} B_1 u &= \alpha_{11} u(a) + \alpha_{12} u'(a) + \beta_{11} u(b) + \beta_{12} u'(b) = c_1 \\ B_2 u &= \alpha_{21} u(a) + \alpha_{22} u'(a) + \beta_{21} u(b) + \beta_{22} u'(b) = c_2, \end{aligned}$$

þar sem stuðlarnir α_{jk}, β_{jk}, c_j eru gefnir fyrir $j, k = 1, 2$. Almenn línuleg jaðarskilyrði fyrir m-ta stigs jöfnu eru af gerðinni

$$B_j u = \sum_{l=1}^{m} \alpha_{jl} u^{(l-1)}(a) + \beta_{jl} u^{(l-1)}(b) = c_j, \qquad j = 1, 2, \dots, m.$$

Við lítum á B_j sem línulega vörpun $C^{m-1}[a,b] \to \mathbb{C}$ og skilgreinum *jaðargildisvirkja* $B : C^{m-1}[a,b] \to \mathbb{C}^m$ með formúlunni $Bu = (B_1 u, \dots, B_m u)$. Almennt jaðargildisverkefni fyrir m-ta stigs línulega jöfnu er að leysa

$$\text{(1.5.1)} \qquad \begin{cases} a_m(t)u^{(m)} + \cdots + a_1(t)u' + a_0(t)u = f(t), & t \in]a, b[\\ Bu = c, \qquad B_j u = \sum\limits_{l=1}^{m} \alpha_{jl} u^{(l-1)}(a) + \beta_{jl} u^{(l-1)}(b), & \end{cases}$$

fyrir gefið fall $f \in C[a,b]$ og gefinn vigur $c \in \mathbb{C}^m$. Athugið að upphafsskilyrðin í (1.4.2) eru almenn línuleg jaðarskilyrði, þar sem við setjum $\beta_{jl} = 0$ fyrir öll j og l, $\alpha_{jl} = 1$ ef $j = l$ og α_{jl} ef $j \neq l$. Ef bilið I er ótakmarkað geta verið skilyrði á markgildin

$$\lim_{x \to \pm\infty} u(x), \qquad \lim_{x \to \pm\infty} u'(x), \quad \dots$$

eftir því sem við á. Þessi skilyrði geta verið sams konar línulegar samantektir og við höfum verið að lýsa.

Fram til þessa höfum við einungis litið á hagnýtingar í eðlisfræði, þar sem venjulegar afleiðujöfnur koma fyrir. Núna skulum við líta á dæmi um hlutafleiðujöfnu, til þess að sjá hvernig jaðargildisverkefni geta verið upprunnin. Fyrir valinu verður varmaleiðnijafnan, en hún lýsir hitastigi $T = T(x, y, z, t)$ í föstu efni sem falli af þremur rúmbreytistærðum (x, y, z) og tíma t. Við látum $\varrho = \varrho(x, y, z)$ tákna eðlismassa efnisins og $c = c(x, y, z)$ varmarýmd þess. Til grundvallar leggjum við lögmál Fouriers , sem segir að varmaflæðið $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$ sé gefið með formúlunni

$$\text{(1.5.2)} \qquad \vec{v} = -\lambda \operatorname{grad} T = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

þar sem fallið $\lambda = \lambda(x, y, z) > 0$ kallast *varmaleiðnistuðull* efnisins. Þetta þýðir að ef við lítum á lítinn flatarskika dA umhverfis punktinn (x, y, z) með þvervigur $\vec{n}$, þá er orkan sem flæðir á tímaeiningu í gegnum skikann í stefnu $\vec{n}$ jöfn

$$\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle dA = -\lambda \langle \operatorname{grad} T, \vec{n} \rangle dA.$$

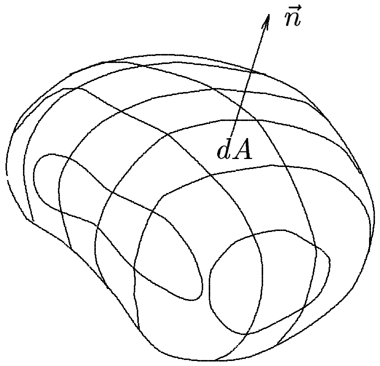
Við látum $F(x, y, z, t)$ tákna þá varmaorku sem myndast í punktinum (x, y, z) á rúm- og tímaeiningu. Ef $F(x, y, z, t) > 0$ þá hitnar efnið umhverfis punktinn (x, y, z) við tímann t, en ef $F(x, y, z, t) < 0$ þá kólnar það.

Nú lítum við á lítinn rúmskika D með jaðri ∂D og athugum orkuvarðveisluna í honum. Við táknum *ytri* þvervigurinn á jaðarinn með $\vec{n}$. Varmaorkan í D sem fall af tíma er þá

$$E(t) = \iiint_D c\varrho T \, dV.$$

Lögmálið um varðveislu orkunnar segir okkur þá að breyting varmaorkunnar í D sé jöfn summu þeirrar orku sem flæðir inn gegnum jaðarinn og þeirrar orku sem myndast inni í D. Þetta tjáum við með jöfnunni

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_D c\varrho T \, dV = \iint_{\partial D} \lambda \langle \operatorname{grad} T, \vec{n} \rangle \, dA + \iiint_D F \, dV.$$



Mynd 1.10

Í þessari jöfnu táknar $dV = dxdydz$ rúmmálsfrymið í D, en dA táknar flatarmálsfrymið á yfirborðinu ∂D. Athugið að flæði inn gegnum jaðarinn er í stefnu $-\vec{n}$. Nú beitum við Gauss–setningunni á flæðið $\vec{v} = -\lambda \operatorname{grad} T$

$$\iint_{\partial D} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle dA = \iiint_D \operatorname{div} \vec{v}\, dV.$$

Við getum því skrifað jöfnuna um orkuvarðveisluna í D sem

$$\iiint_D \Big(c\varrho \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}\big(\lambda \operatorname{grad} T\big) - F \Big) dV = 0.$$

Fyrst þessi jafna gildir hvernig sem rúmskikinn D er valinn, þá verður heildisstofninn að vera 0 og við fáum jöfnuna

$$c\varrho \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}\big(\lambda \operatorname{grad} T\big) = F(x, y, z, t). \tag{1.5.3}$$

Ef við gerum ráð fyrir að ϱ, c og λ séu fastar og setjum $\kappa = \lambda/(c\varrho)$ og $f = F/(c\varrho)$, þá fáum við að hitastigið T uppfyllir *varmaleiðnijöfnuna*

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \operatorname{div}\big(\operatorname{grad} T\big) = \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \Delta T = f(x, y, z, t), \tag{1.5.4}$$

þar sem Δ táknar Laplace–virkjann,

$$\Delta T = \operatorname{div}\big(\operatorname{grad} T\big) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \tag{1.5.5}$$

Varmaleiðnijafnan lýsir eiginleikum falls T af fjórum breytistærðum. Stundum eru verkefnin sem leysa á þannig vaxin að T verður óháð einni eða fleiri breytistærðum. Það á til dæmis við um hitastig í vegg, jarðlögum eða stöng, þar sem gert er ráð fyrir að varmaflæðið sé alls staðar í sömu stefnu. Ef við tökum stöng af lengd L sem dæmi og veljum hnitin þannig að x-ásinn sé eftir stönginni, þá uppfyllir hitastigið

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} = f(x, t), \qquad 0 < x < L, \quad t > 0, \tag{1.5.6}$$

og fallið $c\varrho f(t, x)$ gefur varmaframleiðsluna í stönginni á lengdar- og tímaeiningu. Jaðarskilyrðin sem sett eru í endapunktinum $x = 0$ gætu til dæmis verið eitt af þrennu,

$$T(0, t) = T_0, \qquad \lambda \partial_x T(0, t) = v_0, \qquad \lambda \partial_x T(0, t) = kT(0, t). \tag{1.5.7}$$

Fyrsta skilyrðið er að hitastigið sé fast í enda stangarinnnar, annað skilyrðið segir að varmaflæðið gegnum enda stangarinnar sé fast og það þriðja segir að varmaflæðið gegnum enda stangarinnar sé í hlutfalli við hitastigið þar. Hliðstæð skilyrði má hugsa sér í punktinum $x = L$. Dæmigert jaðargildisverkefni gæti síðan verið að leysa

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} - \kappa \dfrac{\partial^2 T}{\partial^2 x} = f(x,t), & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ T(0,t) = T_0, & -\lambda \partial_x T(L,t) = kT(L,t). \end{cases} \tag{1.5.8}$$

Hugsum okkur nú að fallið f sem lýsir varmamynduninni í stönginni sé einungis háð x en ekki háð tíma t, $f = f(x)$ og að við vitum að markgildin $\lim_{t\to+\infty} \partial_t T(x,t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} T(x,t) = u(x)$, $\lim_{t\to+\infty} \partial_x T(x,t) = u'(x)$, $\lim_{t\to+\infty} \partial_x^2 T(x,t) = u''(x)$ séu öll til. Þá segjum við að u lýsi *æstæðu hitaástandi* í stönginni. Til þess að finna u þurfum við þá að leysa jaðargildisverkefnið

$$-\kappa u'' = f(x), \quad 0 < x < L, \qquad u(0) = T_0, \qquad -\lambda u'(L) = ku(L). \tag{1.5.9}$$

Æfingardæmi

1. a) Sýnið að almenn lausn jöfnunnar

$$-\kappa u'' = f(x), \qquad x \in I,$$

sé af gerðinni

$$u(x) = A + Bx - \frac{1}{\kappa}\int_0^x (x-\xi) f(\xi)\, d\xi,$$

þar sem A og B eru fastar.

b) Sýnið að upphafsgildisverkefnið $-\kappa u'' = f(x)$, $x > 0$, $u(0) = b_0$, $u'(0) = b_1$, hafi lausnina

$$u(x) = b_0 + b_1 x - \frac{1}{\kappa}\int_0^x (x-\xi) f(\xi)\, d\xi.$$

c) Sýnið að jaðargildisverkefnið $-\kappa u'' = f(x)$, $x \in]0, L[$, $u(0) = T_0$, $u(L) = T_1$, hafi lausnina

$$u(x) = (1 - x/L)T_0 + (x/L)T_1 + \frac{L-x}{\kappa L}\int_0^x \xi f(\xi)\, d\xi + \frac{x}{\kappa L}\int_x^L (L-\xi) f(\xi)\, d\xi.$$

2. Leysið jaðargildisverkefnin

a) $-\kappa u'' = x$, $u(0) = T_0$, $-\lambda u'(L) = ku(L)$.

b) $-\kappa u'' = x^2$, $u(0) = T_0$, $-\lambda u'(L) = v_0$.

c) $-\kappa u'' = x^3$, $u(0) = T_0$, $-\lambda u'(L) = ku(L)$.

1.6 Eigingildisverkefni

Það verkefni að leysa afleiðujöfnu af taginu

$$a_m(x)u^{(m)} + \cdots + a_1(x)u' + a_0(x)u = \lambda u, \qquad x \in I, \tag{1.6.1}$$

þar sem λ er tvinntala og I er eitthvert bil á rauntalnaásnum, kallast *eigingildisverkefni*. Verkefnið er fólgið í því að finna öll $\lambda \in \mathbb{C}$ þannig að (1.6.1) hafi lausn u_λ, sem er ekki núllfallið. Slík gildi λ kallast *eigingildi* verkefnisins (1.6.1) og lausnir $u_\lambda \neq 0$ á jöfnunni kallast *eiginföll*.

Á þessu stigi er rétt að rifja upp aðferðina til þess að leysa annars stigs óhliðraða línulega jöfnu með fastastuðla

$$a_2 u'' + a_1 u' + a_0 u = 0.$$

Kennijafna þessarar afleiðujöfnu er annars stigs margliðujafnan

$$a_2\zeta^2 + a_1\zeta + a_0 = 0.$$

Ef kennijafnan hefur tvær ólíkar lausnir ζ_1 og ζ_2, þá er sérhver lausn u af gerðinni

$$u(x) = c_1 e^{\zeta_1 x} + c_2 e^{\zeta_2 x}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

þar sem c_1 og c_2 eru einhverjar tvinntölur. Ef kennijafnan hefur aðeins eina lausn ζ_1 þá verður lausnin af gerðinni

$$u(x) = c_1 e^{\zeta_1 x} + c_2 x e^{\zeta_1 x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Við munum fjalla ítarlega um aðferðir til þess að fást við jöfnur með fastastuðla í kafla 2 og þar sönnum við þessar staðhæfingar.

Sýnidæmi 1.6.1 Lítum á eigingildisverkefnið

$$-u'' = \lambda u.$$

Þessi jafna er jafngild $u'' + \lambda u = 0$, svo kennijafna hennar er $\zeta^2 + \lambda = 0$. Núllstöðvarnar uppfylla $\zeta^2 = -\lambda$ og við getum skrifað þær sem $\pm i\omega$ þar sem ω er tvinntala með $\mathrm{Re}\omega \geq 0$. Við fáum þá tilsvarandi eiginföll

$$u_\lambda(x) = \begin{cases} Ae^{i\omega x} + Be^{-i\omega x}, & \omega^2 = \lambda \neq 0, \mathrm{Re}\omega \geq 0, \\ A + Bx, & \lambda = 0. \end{cases} \tag{1.6.2}$$

$\square$

Algengt er að eigingildisverkefni séu sett fram með *jaðarskilyrðum*. Þá á að leysa m–ta stigs jöfnu (1.6.1) á opnu bili $I = (a, b)$ með skilyrðum á gildin í endapunktum bilsins. Oftast eru slík skilyrði sett fram með línulegum samantektum á gildunum $u(a), u'(a), \dots$ og $u(b), u'(b), \dots$, eins og við sáum í síðustu grein.

Sýnidæmi 1.6.2 Við skulum leysa sömu jöfnu og í sýnidæmi (1.6.1) á bilinu $[0, L]$ með jaðarskilyrðum,

$$-u'' = \lambda u, \qquad u(0) = u(L) = 0.$$

Við höfum séð að fyrir sérhverja tvinntölu λ fáum við almenna lausn (1.6.2). Stuðlarnir A, B og λ ákvarðast síðan með því að setja inn jaðarskilyrðin

$$\begin{aligned} u(0) = A + B = 0, \qquad u(L) = Ae^{i\omega L} + Be^{-i\omega L} = 0, \qquad \text{ef } \lambda \neq 0, \\ u(0) = A = 0, \qquad u(L) = A + BL = 0, \qquad \text{ef } \lambda = 0. \end{aligned}$$

Þar með er $A = B = 0$ í seinna tilfellinu, en það segir okkur að einungis núllfallið sé lausn og því er $\lambda = 0$ ekki eigingildi. Í fyrra tilfellinu fæst hins vegar,

$$A = -B, \qquad \text{og} \qquad 2iA\sin(\omega L) = 0,$$

og við fáum að ω verður að uppfylla $\omega = n\pi/L$, $n = 1, 2, \dots$, til þess að $\lambda = \omega^2$ geti verið eigingildi. Við fáum nú runu af eigingildum

$$\lambda_n = \big(n\pi/L\big)^2, \qquad n = 1, 2, 3 \dots,$$

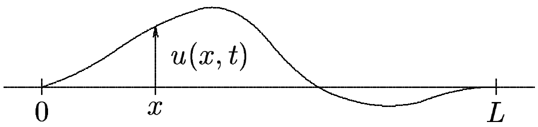
og tilsvarandi eiginföll eru þá af gerðinni

$$u_n(x) = C_n \sin\big(n\pi x/L\big), \qquad C_n \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

$\square$

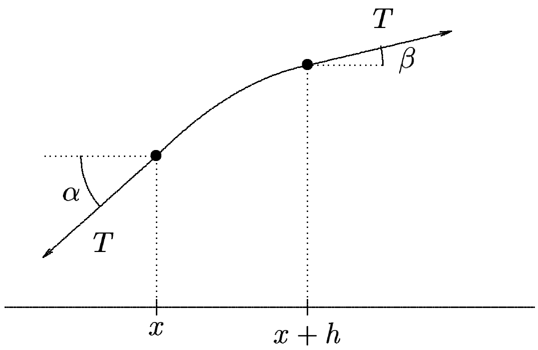
Algengt er að eigingildisverkefni komi upp þegar verið er að leysa hlutafleiðujöfnur með aðferð, sem kallast *aðskilnaður breytistærða*. Áður en við kynnum okkur þessa aðferð skulum við líta á eðlisfræðilegt sýnidæmi:

Sýnidæmi 1.6.3 (*Strengur; bylgjujafna*). Í sýnidæmi 1.3.2 leiddum við út hreyfijöfnur fyrir festi. Nú skulum við líta á skylt dæmi. Það er strengur af lengd L og massa m. Við gerum ráð fyrir að hann sé strekktur, festur niður í báðum endapunktum og að hann sveiflist í plani. Við veljum hnit þannig að stengurinn sé á x-ás þegar hann er í kyrrstöðu og látum $u(x,t)$ tákna færslu strengsins frá punktinum x.



Mynd 1.11

Til þess að leiða út jöfnu fyrir hreyfingu strengsins, þá skoðum við lítinn bút af honum á einhverju augnabliki t yfir bilinu $[x, x+h]$.



Mynd 1.12

Ef T táknar spennuna í strengnum, þá er lóðrétti þáttur togkraftsins, sem verkar á bútinn,

$$-T\sin\alpha + T\sin\beta.$$

Við athugum að *bogalengdarfrymið* á strengnum er

$$ds = \sqrt{1+\big(\partial_x u(x,t)\big)^2}\,dx$$

og

$$\sin\alpha = \frac{\partial_x u(x,t)}{\sqrt{1+\big(\partial_x u(x,t)\big)^2}}, \qquad \sin\beta = \frac{\partial_x u(x+h,t)}{\sqrt{1+\big(\partial_x u(x+h,t)\big)^2}}.$$

Annað lögmál Newtons gefur okkur því

$$\int_x^{x+h} \varrho\partial_t^2 u(\xi,t)\sqrt{1+\big(\partial_x u(\xi,t)\big)^2}\,d\xi$$
$$= T\left(\frac{\partial_x u(x+h,t)}{\sqrt{1+\big(\partial_x u(x+h,t)\big)^2}} - \frac{\partial_x u(x,t)}{\sqrt{1+\big(\partial_x u(x,t)\big)^2}}\right),$$

þar sem $\varrho = m/L$ táknar massa á lengdareiningu í strengnum. Nú gerum við til einföldunar ráð fyrir því að útslagið sé það lítið að

$$\sqrt{1+\big(\partial_x u(x,t)\big)^2} \approx 1$$

og að það megi fella niður kvaðratræturnar í þessum jöfnum. Þá fáum við

$$\int_x^{x+h} \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi, t)\, d\xi = T\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x+h,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big).$$

Nú deilum við í gegnum jöfnuna með h og látum síðan h stefna á núll. Þá fáum við *bylgjujöfnuna*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad c = \sqrt{T/\varrho}. \tag{1.6.3}$$

Strengurinn er festur niður í báðum endapunktum, svo við fáum náttúruleg jaðarskilyrði

$$u(0,t) = u(L,t) = 0. \tag{1.6.4}$$

□

Nú skulum við snúa okkur að aðferðinni, sem kallast *aðskilnaður breytistærða* og beita henni til þess að finna lausn á bylgjujöfnunni (1.6.3) með jaðarskilyrðinu (1.6.4). Við byrjum á því að finna allar lausnir á jöfnunni af gerðinni $T(t)X(x)$. Við stingum þessu falli inn í jöfnuna (1.6.3) og fáum

$$T''(t)X(x) - c^2 T(t)X''(x) = 0.$$

Með því að deila í gegnum þessa jöfnu með $c^2T(t)X(x)$, þá sjáum við að hún jafngildir

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{1.6.5}$$

Vinstra megin jafnaðarmerkisins stendur fall, sem er aðeins háð t, en hægra megin stendur fall, sem er aðeins háð x. Þessi stærð hlýtur því að vera fasti. Við skulum tákna hann með $-\lambda$, þar sem λ er rauntala. Nú segir jaðarskilyrðið (1.6.4) að $X(0) = X(L) = 0$ verði að gilda. Þar með verður X að vera lausn á eigingildisverkefninu

$$-X'' = \lambda X, \qquad X(0) = X(L) = 0.$$

Við fundum lausnina á þessu verkefni í sýnidæmi (1.6.2). Eigingildin eru $\lambda_n = \big(n\pi/L\big)^2$ og tilsvarandi eiginföll má taka $X_n(x) = \sin\big(n\pi x/L\big)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Víkjum nú aftur að (1.6.5) til þess að ákvarða fallið T. Fyrir hin ólíku eigingildi þarf T að uppfylla

$$-T'' = c^2\lambda_n T.$$

Almenn lausn þessarar jöfnu er $T_n(t) = A_n \cos\big(n\pi ct/L\big) + B_n \sin\big(n\pi ct/L\big)$. Niðurstaðan er nú að allar lausnir af gerðinni $T(t)X(x)$ á (1.6.3) með jaðarskilyrðinu (1.6.4) eru

$$T_n(t)X_n(x) = \big(A_n\cos\big(n\pi ct/L\big) + B_n \sin\big(n\pi ct/L\big)\big)\sin\big(n\pi x/L\big), \qquad n = 1, 2, \dots,$$

þar sem velja má fastana A_n og B_n frjálst. Það er ljóst að summa endanlega margra lausna á (1.6.3) og (1.6.4) er lausn og sama gildir um hratt samleitnar óendanlegar raðir

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(A_n\cos\big(n\pi ct/L\big) + B_n \sin\big(n\pi ct/L\big)\big)\sin\big(n\pi x/L\big).$$

Þetta er dæmi um Fourier–röð, en þær munum við fjalla um í kafla 8. Stuðlarnir A_n og B_n ákvarðast síðan af einhverjum upphafsskilyrðum, en þau geta verið af gerðinni

$$u(x,0) = f(x), \qquad \partial_t u(x,0) = g(x),$$

þar sem f og g eru gefin föll á bilinu $(0, L)$. Ef við notfærum okkur samlagningarformúluna fyrir kósínus, þá getum við skrifað röðina sem

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\big(n\pi ct/L - \alpha_n\big) \sin\big(n\pi x/L\big), \tag{1.6.6}$$

þar sem liðurinn númer n hefur sveifluvíddina $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ og fasahliðrun hans α_n uppfyllir $\cos\alpha_n = A_n/C_n$ og $\sin\alpha_n = B_n/C_n$.

Til þess að sjá annað afbrigði af aðskilnaði breytistærða, skulum við líta á jöfnuna

$$a\partial_t^2 u + b\partial_t u + cu - \Delta u = 0, \tag{1.6.7}$$

þar sem $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ táknar Laplace–virkjann og u er fall af tíma t og þremur rúmbreytistærðum (x, y, z), $u = u(t, x, y, z)$. Við leitum fyrst að öllum lausnum á jöfnunni af gerðinni $u(x, y, z, t) = T(t)X(x)Y(y)Z(z)$, þar sem föllin T, X, Y og Z eru hvert um sig háð einni breytistærð. Við sjáum að

$$\begin{aligned}\frac{1}{u}\bigg(a\partial_t^2 u + b\partial_t u + cu - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u - \partial_z^2 u\bigg)& \\ = \frac{aT''(t) + bT(t)' + cT(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} &= 0.\end{aligned}$$

Þessi jafna er jafngild

$$\frac{aT''(t) + bT(t)' + cT(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{Z''(z)}{Z(z)}. \tag{1.6.8}$$

Nú sjáum við að í hægri hlið jöfnunnar stendur fall sem er einungis háð z, en í vinstri hliðinni stendur fall sem er háð (x, y, t). Þar með hlýtur $Z''(z)/Z(z)$ að vera fastafall. Með nákvæmlega sömu rökum fáum við síðan að hinir liðirnir í (1.6.8) eru fastaföll og við fáum því

$$-X''(x) = \lambda X(x), \qquad -Y''(y) = \mu Y(y), \qquad -Z''(z) = \nu Z(z), \tag{1.6.9}$$

$$aT''(t) + bT'(t) + (c + \lambda + \mu + \nu)T = 0, \tag{1.6.10}$$

þar sem λ, μ og ν eru raun- eða tvinntölur eftir því hvort við gerum ráð fyrir raun- eða tvinntölugildum lausnum.

Hugsum okkur nú að við viljum leysa hlutafleiðujöfnuna (1.6.7) á menginu

$$\Omega = \{(x, y, z, t); 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1\}$$

með því randskilyrði að $u(x, y, z, t) = 0$ ef (x, y, z, t) er punktur á jaðri Ω, en það þýðir að eitt hnitanna x, y eða z taki gildið 0 eða 1. Ef við beitum aðskilnaði breytistærða eins og áður var lýst, þá sjáum við að föllin X, Y og Z verða öll að vera lausnir á eigingildisverkefninu í sýnidæmi 1.6.2. Þar með sjáum við að sérhver lausn á hlutafleiðujöfnunni (1.6.6) af gerðinni $u(x, y, z, t) = T(t)X(x)Y(y)Z(z)$ með þessum randskilyrðum er af gerðinni

$$u(x, y, z, t) = T_{\ell,m,n}(t) \sin(\ell\pi x) \sin(m\pi y) \sin(n\pi z), \qquad \ell, m, n = 1, 2, 3, \dots,$$

þar sem $T_{\ell,m,n}$ er almenn lausn jöfnunnar

$$aT'' + bT' + \big(c + \pi^2(\ell^2 + m^2 + n^2)\big)T = 0.$$

Við munum fjalla um aðskilnað breytistærða til hlítar, þegar við förum að fást við hlutafleiðujöfnur. Hér var aðferðin einungis kynnt að hluta til í þeim tilgangi að sýna hvernig eigingildisverkefni koma upp á eðlilegan hátt í verkefnum sem tengjast hlutafleiðujöfnum.

Æfingardæmi

1. Leysið eigingildisverkefnin

a) $-u'' = \lambda u, \; u'(0) = u'(L) = 0.$

b) $-u'' = \lambda u, \; u(0) = u'(L) = 0.$

2. Notið niðurstöðuna úr dæmi 1 til þess að finna allar lausnir af gerðinni $u(x,t) = T(t)X(x)$ á verkefnunum

a) (*Bylgjujafna*)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0.$$

b) (*Varmaleiðnijafna*)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad u(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0.$$

1.7 Tilvist og ótvíræðni lausna á afleiðujöfnum

Í þessari grein ætlum við að fjalla um tilvist á lausn á upphafsgildisverkefninu

$$u' = f(t,u), \qquad u(a) = b, \tag{1.7.1}$$

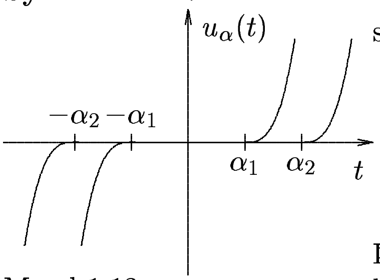
þar sem fallið $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^m)$ er skilgreint á einhverju hlutmengi Ω í $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, a er gefin rauntala, b er gefinn vigur og $(a,b) \in \Omega$. Tilfellið að f taki gildi í tvinntölurúminu $\mathbb{C}^m$ og að Ω sé hlutmengi í $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^m$ fæst síðan með því að líta á $\mathbb{C}^m$ sem vigurrúmið $\mathbb{R}^{2m}$. Ef við ætlumst til þess að lausnin u hafi samfellda afleiðu, þá þurfum við auðvitað að gera ráð fyrir því að fallið f sé samfellt.

Setning 1.7.1 (*Peano*). *Gerum ráð fyrir að Ω sé grennd um punktinn $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ og að $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Þá er til opið bil I sem inniheldur punktinn a og fall $u : I \to \mathbb{R}^m$, þannig að $(t, u(t)) \in \Omega$, $u'(t) = f(t, u(t))$ fyrir öll $t \in I$ og $u(a) = b$.* □

Setning Peano er of erfið til þess að við getum átt við að sanna hana hér, en fróðlegt er að vita hvað hún segir. Við munum hins vegar sanna tvær tilvistarsetningar, sem kenndar eru við Picard. Í þeim gefum við okkur meiri forsendur um fallið f, en að það sé bara samfellt, og þær tryggja að lausnin verði ótvírætt ákvörðuð. Setning Peano segir okkur einungis að til sé lausn en hún segir ekkert um það hvort lausnin er ótvírætt ákvörðuð.

Sýnidæmi 1.7.2 Athugum upphafsgildisverkefnið $u' = 3u^{2/3}$, $u(0) = 0$. Fyrir sérhvert $\alpha > 0$ fáum við lausnina u_α, sem skilgreind er með

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} (t+\alpha)^3, & t < -\alpha, \\ 0, & -\alpha \le t < \alpha, \\ (t-\alpha)^3, & \alpha \le t. \end{cases}$$



Mynd 1.13

Þetta dæmi sýnir okkur að til þess að fá ótvírætt ákvarðaða lausn þurfum við að setja einhver strangari skilyrði á f en samfelldni. □

Skilgreining 1.7.3 (*Lipschitz–skilyrði*). Látum $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ vera fall, þar sem $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ og $A \subset \Omega$. Ef til er fasti C þannig að

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le C|x - y|, \qquad (t,x),(t,y) \in A, \tag{1.7.2}$$

þá segjum við að f uppfylli *Lipschitz–skilyrði* í menginu A. □

Sýnidæmi 1.7.4 (i) Ef jöfnuhneppið er línulegt, $f(t,x) = A(t)x + g(t)$, $A \in C(I, \mathbb{C}^{m\times m})$ og $g \in C(I, \mathbb{C}^m)$, þá uppfyllir f Lipschitz–skilyrði í $J \times \mathbb{C}^m$ fyrir sérhvert lokað og takmarkað hlutbil $J \subset I$. Þetta sést á því að

$$|f(t,x) - f(t,y)| = |A(t)(x-y)| \leq \sum_{j,k=1}^{m} |a_{jk}(t)||x-y| \leq C|x-y|,$$

þar sem $C = \sup \sum_{j,k=1}^{m} |a_{jk}(t)|$ og efra markið er tekið yfir öll $t \in J$.

(ii) Látum $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ og gerum ráð fyrir Ω sé þannig að fyrir sérhvert par af punktum $(t,x), (t,y)$ í Ω liggi línustrikið milli þeirra í Ω. Línustrikið samanstendur af öllum punktum $(t, \tau x + (1-\tau)y)$, $\tau \in [0,1]$. Látum nú A vera lokað og takmarkað hlutmengi af Ω, sem hefur þann eiginleika að fyrir sérhvert par af punktum $(t,x), (t,y)$ í A liggur línustrikið á milli þeirra í A. Þá er

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &= \Big|\int_0^1 \frac{d}{d\tau} f(t, (1-\tau)y + \tau x)\, d\tau\Big| \\ &= \Big|\int_0^1 \sum_{j=1}^{m} \partial_{x_j} f(t, (1-\tau)y + \tau x)(x_j - y_j)\, d\tau\Big| \\ &\leq \sup_{(\tau,\xi)\in A} \sum_{j=1}^{m} |\partial_{x_j} f(\tau, \xi)||x-y|, \end{aligned}$$

og þar með uppfyllir f Lipschitz–skilyrði í A.

(iii) Lítum nú á fallið $f(t,x) = x^2$, með $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Það uppfyllir

$$|f(t,x) - f(t,y)| = |(x+y)||x-y|,$$

en þetta gefur okkur að f uppfylli ekki Lipschitz–skilyrði í Ω, því þátturinn $x+y$ er ekki takmarkaður. Ef við látum hins vegar $[\alpha, \beta]$ vera takmarkað bil og veljum $A = \mathbb{R} \times [\alpha, \beta]$, þá uppfyllir fallið f Lipschitz–skilyrði í A og við getum valið fastann C sem $C = 2(|\alpha| + |\beta|)$.

(iv) Fallið $f(t,x) = 3x^{2/3}$, í sýnidæmi 1.7.2, er samfellt, en uppfyllir ekki Lipschitz–skilyrði í neinni grennd um 0, því $|f(t,x) - f(t,0)| = x^{2/3} = x^{-1/3}|x - 0|$ og $x^{-1/3} \to \infty$ ef $x \to 0$. □

Nú kemur í ljós að Lipschitz–skilyrði tryggir að lausnin verður ótvírætt ákvörðuð:

Setning 1.7.5 (*Picard; víðfeðm útgáfa*). *Látum $I \subset \mathbb{R}$ vera opið bil, $a \in I$, $b \in \mathbb{R}^m$, $f \in C(I \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ og gerum ráð fyrir að f uppfylli Lipschitz–skilyrði í $J \times \mathbb{R}^m$ fyrir sérhvert lokað og takmarkað hlutbil J í I. Þá er til ótvírætt ákvörðuð lausn $u \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ á upphafsgildisverkefninu*

$$u' = f(t,u), \qquad u(a) = b.$$

□

Þessi setning er önnur tveggja tilvistarsetninga sem við sönnum í næstu grein. Eins og fram hefur komið kallast hún venjulega *víðfeðm* útgáfa af tilvistarsetningu fyrir fyrsta stigs hneppi. Ástæðan fyrir nafngiftinni er, að við fáum lausn á bili sem inniheldur öll t–gildi þar sem hægri hlið jöfnunnar er skilgreind. Tökum nú fyrir tvær mikilvægustu afleiðingar setningarinnar. Í sýnidæmi 1.7.4 sáum við að forsendurnar í setningu 1.7.5 eru uppfylltar fyrir línuleg jöfnuhneppi með samfellda stuðla. Við lítum á vigurrúmið $\mathbb{C}^m$ yfir tvinntölurnar sem $2m$ víða rúmið $\mathbb{R}^{2m}$ yfir rauntölurnar og fáum:

Fylgisetning 1.7.6 *Látum $I \subset \mathbb{R}$ vera opið bil, $a \in I$, $b \in \mathbb{C}^m$, $A \in C(I, \mathbb{C}^{m\times m})$ og $f \in C(I, \mathbb{C}^m)$. Þá er til ótvírætt ákvörðuð lausn $u \in C^1(I, \mathbb{C}^m)$ á upphafsgildisverkefninu*

$$u' = A(t)u + f(t) \qquad u(a) = b. \tag{1.7.3}$$

Í grein 1.4 sáum við að það er jafngilt að leysa upphafsgildisverkefnið (1.4.2) fyrir línulega afleiðuvirkja af stigi m og að leysa hliðstætt upphafsgildisverkefni af gerðinni (1.7.3), þar sem fylkið A og vigurinn f eru gefin með (1.3.5). Við höfum því: □

Fylgisetning 1.7.7 *Látum $I \subset \mathbb{R}$ vera opið bil, $a \in I$, $b_0, \dots, b_{m-1} \in \mathbb{C}$, $a_0, \dots, a_m, g \in C(I)$ og $a_m(t) \neq 0$ fyrir öll $t \in I$. Þá er til ótvírætt ákvörðuð lausn $u \in C^m(I)$ á upphafsgildisverkefninu*

$$a_m(t)u^{(m)} + \cdots + a_1(t)u' + a_0(t)u = g(t),$$
$$u(a) = b_0, u'(a) = b_1, \dots, u^{(m-1)}(a) = b_{m-1}.$$

□

Nú setjum við fram aðra útgáfu sem venjulega kallast *staðbundin* útgáfa af tilvistarsetningu fyrir fyrsta stigs hneppi:

Setning 1.7.8 (*Picard; staðbundin útgáfa*). *Látum Ω vera opið hlutmengi í $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $(a, b) \in \Omega$ og $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Gerum ráð fyrir að til sé grennd U um punktinn (a, b) innihaldin í Ω og að fallið f uppfylli Lipschitz–skilyrði í U. Þá er til opið bil I á $\mathbb{R}$ sem inniheldur a og ótvírætt ákvörðuð lausn $u \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ á upphafsgildisverkefninu*

$$u' = f(t, u), \qquad u(a) = b.$$

□

Ástæðan fyrir því að þessi setning kallast *staðbundin* útgáfa af tilvistarsetningunni fyrir fyrsta stigs afleiðujöfnuhneppi er sú, að hún segir okkur einungis að til sé bil I þar sem lausnin er til. Í sönnuninni, sem við tökum fyrir í næstu grein, kemur fram hvernig bilið I er háð U, Lipschitz–fasta fallsins f og upphafsgildinu b.

Sýnidæmi 1.7.9 Við skulum taka eitt dæmi til þess að sjá hvernig skilgreiningarsvæði lausnarinnar er háð upphafsgildinu b og líta á verkefnið $u' = u^2$, $u(0) = b$, þar sem b er jákvæð rauntala. Lausnin er fallið

$$u(t) = \frac{b}{1 - bt}, \qquad t \in I =]-\infty, 1/b[.$$

Maður skyldi ætla að óreyndu, að svona einföld jafna hefði lausn, sem skilgreind er á öllum rauntalnaásnum, en svo er greinilega ekki. Skilgreiningarsvæðið minnkar eftir því sem upphafsgildið stækkar. □

Aðferðin sem beitt er í sönnuninni á þessum setningum er kennd við franska stærðfræðinginn Emile Picard. Eins og áður hefur verið sagt framkvæmum við hana í smáatriðum í næstu grein. Auðvelt er að skilja meginhugmyndina í sönnuninni á víðfeðmu útgáfunni af Picard–setningunni og skulum við líta á hana núna.

Við athugum fyrst, að

$$u \in C^1(I, \mathbb{R}^m), \quad u' = f(t, u), \quad t \in I, \quad u(a) = b \tag{1.7.4}$$

er jafngilt því að

$$u \in C(I, \mathbb{R}^m), \quad u(t) = b + \int_a^t f(\tau, u(\tau))\, d\tau, \qquad t \in I. \tag{1.7.5}$$

Okkur dugir því að sanna að til sé ótvírætt ákvarðað fall $u \in C(I, \mathbb{R}^m)$ sem uppfyllir heildunarjöfnuna (1.7.5). Tilvistin er fengin með því að skilgreina runu $\{u_n\}$ af föllum í $C(I, \mathbb{R}^m)$ með formúlunni

$$u_0(t) = b, \qquad u_n(t) = b + \int_a^t f(\tau, u_{n-1}(\tau))\, d\tau, \qquad t \in I, \tag{1.7.6}$$

og sýna síðan að þessi fallaruna sé samleitin að markfalli u. Ekki er nóg að sýna að runan $\{u_n(t)\}$ stefni á $u(t)$ í sérhverjum punkti heldur þurfum við að sanna að $\{u_n\}$ sé samleitin í *jöfnum mæli* á sérhverju lokuðu og takmörkuðu hlutbili J af I. Samkvæmt niðurstöðunum í viðauka B, þá er markfallið u í $C(I, \mathbb{R}^m)$. Lipschitz skilyrðið gefur að

$$|f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))| \leq C|u_n(t) - u(t)|, \qquad t \in J,$$

og þar með að runan $f(t, u_n(t))$ stefnir á markfallið $f(t, u(t))$ í jöfnum mæli á J. Þá megum við skipta á heildi og markgildi og við fáum það sem sanna á,

$$\begin{aligned} u(t) = \lim_{n\to+\infty} u_n(t) = b + \lim_{n\to+\infty} \int_a^t f(\tau, u_{n-1}(\tau))\, d\tau = \\ = b + \int_a^t \lim_{n\to+\infty} f(\tau, u_{n-1}(\tau))\, d\tau = b + \int_a^t f(\tau, u(\tau))\, d\tau. \end{aligned}$$

Tökum nú tvö dæmi, sem sýna hvers er að vænta um samleitni rununnar $\{u_n\}$.

Sýnidæmi 1.7.10 Fyrsta stigs afleiðujafnan $u' - \alpha u = 0$ með upphafsskilyrðið $u(0) = b$, þar sem α og b eru einhverjar tvinntölur, hefur lausnina $u(t) = be^{\alpha t}$. Hér er $f(t, x) = \alpha x$ og runan $\{u_n\}$ er

$$\begin{aligned} u_0(t) &= b, \\ u_1(t) &= b + \int_0^t \alpha b\, d\tau = b(1 + \alpha t), \\ u_2(t) &= b + \int_0^t \alpha b(1 + \alpha\tau)\, d\tau = b(1 + \alpha t + (\alpha t)^2/2), \\ u_3(t) &= b + \int_0^t \alpha b(1 + \alpha\tau + (\alpha\tau)^2/2)\, d\tau = b(1 + \alpha t + (\alpha t)^2/2 + (\alpha t)^3/3!), \quad \dots, \\ u_n(t) &= b + \int_0^t \alpha b\big(1 + \alpha\tau + \cdots + \frac{(\alpha\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\big)\, d\tau = b(1 + \alpha t + \cdots + (\alpha t)^n/n!). \end{aligned}$$

Við sjáum nú að $u_n(t)$ er n–ta stigs Taylor–margliða fallsins $u(t)$ í punktinum $a = 0$. □

Sýnidæmi 1.7.11 Lítum nú á línulega jöfnuhneppið

$$u' = Au, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

en það hefur lausnina

$$u(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad f(t, u_{n-1}(t)) = Au_{n-1}(t) = \begin{bmatrix} -u_{2,n-1}(t) \\ u_{1,n-1}(t) \end{bmatrix}.$$

Með þessa formúlu að vopni er einfalt að ákvarða rununa u_n

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ u_1(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}, \\ u_2(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} -\tau \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 1 - t^2/2 \\ t \end{bmatrix}, \\ u_3(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} -\tau \\ 1 - \tau^2/2 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 1 - t^2/2 \\ t - t^3/3! \end{bmatrix}, \\ u_4(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} -\tau + \tau^3/3! \\ 1 - \tau^2/2 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 1 - t^2/2! + t^4/4! \\ t - t^3/3! \end{bmatrix}, \quad \dots, \\ u_{2k}(t) &= \begin{bmatrix} 1 - t^2/2! + \cdots + (-1)^k t^{2k}/(2k)! \\ t - t^3/3! + \cdots + (-1)^{k-1} t^{2k-1}/(2k-1)! \end{bmatrix} \\ u_{2k+1}(t) &= \begin{bmatrix} 1 - t^2/2! + \cdots + (-1)^k t^{2k}/(2k)! \\ t - t^3/3! + \cdots + (-1)^k t^{2k+1}/(2k+1)! \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nú birtast hér Taylorraðir fallanna $\cos t$ og $\sin t$, svo við fáum

$$u_n(t) \to u(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix},$$

eins og við var að búast. □

Æfingardæmi

1. Reiknið út föllin $u_0, \ldots, u_3$ í Picard-aðferðinni fyrir upphafsgildisverkefnið $u' = 1 + u^2$, $u(0) = 0$ og berið saman við réttu lausnina.

2. Sýnið að upphafsgildisverkefnið $tu' = 2u$, $u(0) = 1$ hefur enga lausn.

3. Sýnið að fallið $f(x, y) = |\sin y| + x$ fullnægi Lipschitz-skilyrði, en að $\partial f/\partial y$ sé ekki til í $y = 0$.

4. a) Uppfylla föllin $f(x, y) = |x| + |y|$ og $g(x, y) = x|y|$ Lipschitz-skilyrði? Eru hlutafleiðurnar $\partial f/\partial y$ og $\partial g/\partial y$ til?
b) Finnið allar lausnir jöfnunnar $u' = t|u|$.

1.8 Sannanir á Picard–setningunum

Í þessari grein sönnum við setningar 1.7.5 og 1.7.8. Ótvíræðnin er sönnuð á sama hátt í þeim báðum svo við byrjum á henni.

Ótvíræðni: Gerum ráð fyrir að upphafsgildisverkefnið (1.7.4) og þar með heildunarjafnan (1.7.5) hafi tvær lausnir $u(t)$ og $v(t)$ og hugsum okkur fyrst að $t \geq a$. Þá gefur Lipschitz skilyrðið

$$0 \leq |u(t) - v(t)| = |\int_a^t (f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, v(\tau))\, d\tau| \leq C \int_a^t |u(\tau) - v(\tau)|\, d\tau. \tag{1.8.1}$$

Við setjum nú $w(t) = \int_a^t |u(\tau) - v(\tau)|\, d\tau$ og sjáum að ójafnan (1.8.1) er jafngild

$$w'(t) - Cw(t) \leq 0.$$

Eftir margföldun með e^{-Ct} fæst $(e^{-Ct}w(t))' \leq 0$, ef $t \geq a$, og þar með er $e^{-Ct}w(t)$ minnkandi fall af t, ef $t \geq a$. Við höfum að $w(a) = 0$, svo af ójöfnunni

$$0 \leq e^{-Ct}w(t) \leq e^{-Ca}w(a) = 0, \qquad t \geq a,$$

leiðir að $u(t) = v(t)$ fyrir öll $t \geq a$. Hugsum okkur nú að $t \leq a$. Í stað ójöfnunnar (1.8.1) fáum við

$$0 \leq |u(t) - v(t)| \leq C \int_t^a |u(\tau) - v(\tau)|\, d\tau.$$

Nú setjum við $w(t) = \int_t^a |u(\tau) - v(\tau)|\, d\tau$ og fáum ójöfnuna $-w'(t) \leq Cw(t)$, sem gefur síðan að $e^{Ct}w(t)$ sé vaxandi fall. Þar með er

$$0 \leq e^{Ct}w(t) \leq e^{Ca}w(a) = 0, \qquad t \leq a,$$

og við höfum einnig sannað að $u(t) = v(t)$ fyrir $t \leq a$. ■

Sönnun á tilvist í setningu 1.7.5: Við skilgreinum rununa $\{u_n\}$ með formúlunni (1.7.5). Samkvæmt athugun okkar í grein 1.7, þá þurfum við einungis að sanna að runan $\{u_n\}$ sé samleitin í jöfnum mæli á sérhverju lokuðu hlutbili J af I með $a \in J$. Við höfum

$$u_n(t) = u_0(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \big(u_{k+1}(t) - u_k(t)\big)$$

og því dugir að sanna röðin $\sum_{n=0}^{\infty} (u_{k+1} - u_k)$ sé samleitin í jöfnum mæli á bilinu J. Við setjum $M = \sup_{t \in J} |f(t, b)|$. Þá er

$$|u_1(t) - u_0(t)| = \Big| \int_a^t f(\tau, b)\, d\tau \Big| \le M|t - a|. \tag{1.8.2}$$

Lipschitz–skilyrðið gefur

$$\begin{aligned}
|u_2(t) - u_1(t)| &= \Big| \int_a^t \big(f(\tau, u_1(\tau)) - f(\tau, u_0(\tau))\big)\, d\tau \Big| \\
&\le \Big| \int_a^t \big|f(\tau, u_1(\tau)) - f(\tau, u_0(\tau))\big|\, d\tau \Big| \\
&\le \Big| \int_a^t C\big|u_1(\tau) - u_0(\tau)\big|\, d\tau \Big| \\
&\le \Big| \int_a^t CM|\tau - a|\, d\tau \Big| = CM\frac{|t-a|^2}{2}.
\end{aligned}$$

Í síðasta skrefinu notuðum við ójöfnuna (1.8.2). Með þrepun fæst

$$|u_{k+1}(t) - u_k(t)| \le MC^k \frac{|t-a|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Fyrst J er takmarkað bil, þá er til $T > 0$ þannig að $|t - a| \le T$ fyrir öll $t \in J$, og því fáum við

$$|u_{k+1}(t) - u_k(t)| \le MC^k \frac{T^{k+1}}{(k+1)!}.$$

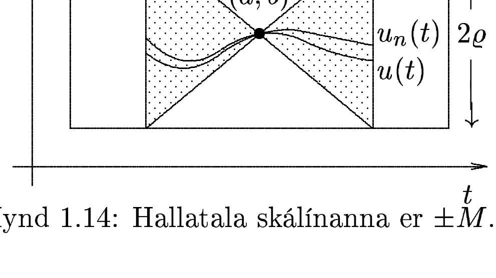
Röðin $\sum_{k=0}^{\infty} MC^k T^{k+1}/(k+1)!$ samleitin fyrir sérhvert $C > 0$ og $T > 0$ og þar með gefur samleitnipróf Weierstrass í viðauka B að röðin $\sum_{k=0}^{\infty}(u_{k+1} - u_k)$ er samleitin í jöfnum mæli á J. ■

Sönnun á tilvist í setningu 1.7.8: Í sönnuninni á setningu 1.7.5 var runan $u_n(t)$ vel skilgreind með formúlunni (1.7.6), því skilgreiningarsvæði fallsins f var $I \times \mathbb{R}^m$. Nú gerum við ráð fyrir að skilgreiningarsvæðið Ω geti verið minna mengi og við þurfum að sjá til þess að $(t, u_n(t))$ haldist innan Ω fyrir öll n og $t \in I$, ef I er valið nógu lítið. Við göngum út frá því í forsendum okkar að til sé mengi af gerðinni

$$R_0 = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; |t - a| \le r_0, |x - b| \le \varrho\}$$

þar sem f uppfyllir Lipschitz–skilyrði. Við látum C tákna Lipschitz–fastann og setjum $M = \max_{(t,x) \in R_0} |f(t, x)|$. Síðan veljum við $r = \min\{r_0, \varrho/M\}$ og skilgreinum

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; |t - a| \le r, |x - b| \le \varrho\}, \qquad \text{og} \qquad I = [a - r, a + r].$$



Mynd 1.14: Hallatala skálínanna er $\pm M$.

Nú er auðvelt að sanna með þrepun að $(t, u_n(t)) \in R$ fyrir öll $t \in I$. Ef $n = 0$ er þetta augljóst, því $u_0(t)$ er fastafallið b. Ef $(t, u_n(t)) \in R$ fyrir öll $t \in I$, þá er $u_{n+1}(t)$ vel skilgreint með formúlunni (1.7.6) og við höfum

$$|u_{n+1}(t) - b| \leq |\int_a^t f(\tau, u_n(\tau))\, d\tau| \leq M|t-a| \leq Mr \leq \varrho,$$

fyrir öll $t \in I$. Þar með er $(t, u_{n+1}(t)) \in R$ fyrir öll $t \in I$. Með nákvæmlega sömu rökum og í sönnuninni á setningu 1.7.5 fæst nú að runan $\{u_n\}$ er samleitin í jöfnum mæli á I og að markgildi hennar uppfyllir (1.7.4). $\blacksquare$